Original Article

Journal of Aquifer and Qanat

Spring and Summer 2026, Vol. 7, No. 1, pp 1-24

10.22077/jaaq.2026.10702.1136

Providing A Semi-Analytical Solution To The Henry Problem and The Effect of Bed Slope on Seawater Intrusion into Confined Coastal Aquifers

Saleh Mehdizadeh[1] | **Rasoul Mirabbasi**[1] | **Ali Raeisi Isa-Abadi**[1,✉] | **Marwan Fahs**[2]

1. Department of Water Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran.
2. Laboratoire d'Hydrologie de Géochimie, National School for Water and Environmental Engineering, University of Strasbourg, France.

✉Corresponding Author: ali_raeisi@sku.ac.ir

Received:
16 December 2025

Revised:
23 January 2026

Accepted:
08 February 2026

Keywords:

Inclined coastal aquifers, Henry Problem, Semi-Analytical solution, Saltwater intrusion, COMSOL model.

Extended abstract

Introduction

Seawater intrusion (SWI) is a global environmental challenge affecting the quality of groundwater in coastal areas. The Henry Problem has long been the standard benchmark for validating variable-density flow models. However, most existing analytical and semi-analytical solutions are confined to horizontal rectangular domains. In reality, coastal aquifers often possess inclined boundaries (seaward or landward slopes) that significantly influence the hydrodynamic behaviour of the salt wedge. This study addresses this gap by developing a robust semi-analytical solution that accounts for the bed slope, providing a more realistic benchmark for numerical simulators and a deeper understanding of SWI dynamics in sloped geometries.

Materials and Methods

The mathematical framework is based on the coupled governing equations of fluid flow and solute transport. The flow is governed by Darcy's law, while the transport is described by the advection-dispersion equation.

Cite this article: Mehdizadeh, S., Mirabbasi, R., Raeisi Isa-Abadi, A. & Fahs, M. (2026). Providing a semi-analytical solution to the Henry Problem and the effect of bed slope on seawater intrusion into confined coastal aquifers. *Journal of Aquifer and Qanat*, *7* (1), 1-24. https://doi.org/10.22077/jaaq.2026.10702.1136.

Copyright: © 2026 by the authors. Licensee: Journal of Aquifer and Qanat. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

To handle the non-rectangular geometry caused by the slope, a specific coordinate transformation was employed to map the inclined domain onto a regular computational rectangle. The stream function Ψand the salt concentration C are expanded into double Fourier series. This approach transforms the partial differential equations (PDEs) into a system of nonlinear algebraic equations. Unlike traditional methods that rely on numerical differentiation for the Jacobian matrix, this study utilizes an analytically derived Jacobian within the Newton-Raphson iteration process. This approach ensures high precision and robust convergence when solving the Fourier coefficients, especially compared to numerical differentiation techniques. The results were rigorously validated against a numerical model developed in COMSOL Multiphysics, focusing on the 25%, 50%, and 75% Isochlor lines.

Results and Discussion

The results demonstrate that the bed slope is a decisive factor in determining the extent of seawater intrusion. The comparison between the semi-analytical and numerical models showed excellent agreement, confirming the stability of the Fourier-Galerkin approach in sloped domains. It was found that a landward slope (positive slope) facilitates the landward movement of the salt wedge, leading to a significant increase in the intrusion length. For instance, a +30-degree slope can increase salt intrusion by up to 22%, even without considering sea-level rise. Conversely, aquifers with a seaward slope (negative angle), typical of many coral islands and deltas, exhibit a natural hydraulic resistance to SWI. In these cases, the geometry of the aquifer bed acts as a barrier, effectively compressing the saltwater wedge and significantly reducing its landward advancement. A key finding of this research is the Strong Correlation between the bed slope angle and the intrusion length of the salt wedge, providing a simple yet powerful rule of thumb for coastal water management.

Conclusion

This study highlights that neglecting the bed slope in coastal aquifer modelling can lead to significant errors in vulnerability assessments. The developed semi-analytical tool is computationally efficient and provides a high-precision alternative to complex numerical models for steady-state scenarios. The findings are particularly relevant for predicting the impacts of climate change and sea-level rise, suggesting that aquifers with landward slopes (Positive slope) are at much higher risk than previously estimated using horizontal models. This tool can assist water resource managers in making more informed decisions regarding pumping strategies and coastal protection measures.

مقاله پژوهشی

مجله
آبخوان و قنات

دوره هفتم، شماره اول، بهار و تابستان ۱۴۰۵، صفحات ۲۴-۱

10.22077/jaaq.2026.10702.1136

ارائه حل نیمه‌تحلیلی مسئله هنری و بررسی تأثیر شیب بر پیشروی آب شور دریا به آبخوان‌های محصور ساحلی

صالح مهدی‌زاده[۱] | رسول میرعباسی نجف‌آبادی[۱] | علی رئیسی[۱،✉] | مروان فحص[۲]

۱. گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران.
۲. گروه مهندسی آب و محیط زیست، دانشگاه استراسبورگ، فرانسه.

✉نویسنده مسئول: ali_raeisi@sku.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۹/۲۵
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۱۱/۰۳
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۱/۱۹

کلیدواژه‌ها:
آبخوان‌های ساحلی شیب‌دار، مسئله هنری، حل نیمه‌تحلیلی، نفوذ آب شور، مدل کامسول.

چکیده

در این پژوهش، یک راه‌حل نیمه‌تحلیلی برای مسئله هنری در آبخوان‌های ساحلی شیب‌دار ارائه شد. با به‌کارگیری تبدیل مختصات شیب‌دار و روش فوریه–گالرکین، معادلات حاکم بر جریان چگالی متغیر و انتقال جرم در حالت جریان ماندگار حل شده و ضرایب سری‌های فوریه از طریق روش نیوتن همراه با محاسبه تحلیلی ژاکوبین تعیین گردید. هدف اصلی این مطالعه، صحت‌سنجی راه حل نیمه‌تحلیلی ارائه شده در هندسه‌های غیر افقی و بررسی تأثیر شیب بستر بر پیشروی گوه آب شور به سمت آبخوان است. مقایسه دقیق بین راه‌حل نیمه‌تحلیلی و نتایج حل عددی مدل کامسول حاکی از همپوشانی بسیار بالا میان خطوط هم‌غلظت ۲۵، ۵۰ و ۷۵ درصد است که صحت و پایداری روش ارائه‌شده را تأیید می‌کند. نتایج برای شیب‌های بین ۳۰- تا ۳۰+ درجه نشان داد که شیب رو به خشکی موجب افزایش طول نفوذ آب شور شده، درحالی‌که شیب رو به دریا سبب فشرده‌شدن گوه و کاهش پیشروی می‌گردد. یافته‌ها نشان می‌دهند که تغییرات شیب بستر رابطه‌ای تقریباً خطی با طول نفوذ گوه شور دارد و شیب هندسی بستر نقشی کلیدی در کنترل رفتار آب شور در آبخوان‌های ساحلی ایفا می‌کند. راه‌حل نیمه‌تحلیلی توسعه‌یافته در این تحقیق می‌تواند به‌عنوان یک معیار معتبر برای ارزیابی عملکرد مدل‌های عددی مورد استفاده قرار گیرد و به‌عنوان ابزاری قدرتمند برای تحلیل سریع سناریوهای مدیریتی و ارزیابی اثرات تغییر اقلیم در مناطق ساحلی شیب‌دار به کار رود.

مقدمه

امروزه مناطق ساحلی درصد قابل توجهی از جمعیت جهان را در خود جای داده‌اند. بر اساس گزارش سازمان ملل حدود ۴۰ درصد از جمعیت جهان در نوار ۱۰۰ کیلومتری خط ساحلی زندگی می‌کنند. در حال حاضر، نفوذ آب شور یا نفوذ آب دریا به یکی از اصلی‌ترین تهدیدها برای تأمین آب شیرین در مناطق ساحلی تبدیل شده است (White et al., 2007).

منطقه ساحلی یک ناحیه انتقالی بین اقیانوس و زمین است که نقش منحصر به فردی در ارتباط بین سیستم‌های اکولوژیکی دریایی و زمینی ایفا می‌کند (Ferguson and Gleeson, 2012). در زمان تداخل، به دلیل چگالی کمتر آب شیرین نسبت به آب شور، آب شیرین در بالای آب شور قرار می‌گیرد (Jamshidzadeh et al. 2012) در فرآیند نفوذ آب دریا به آبخوان ساحلی، بین جبهه پیش‌رونده آب شور دریا و آب شیرین زیرزمینی یک ناحیه بینابینی ایجاد می‌گردد که غلظت شوری در آن بین تقریبا صفر تا ۱۰۰ درصد متغیر است. موقعیت و ضخامت این ناحیه به عوامل متعددی از جمله شرایط فیزیکی و هیدرولیکی آبخوان بستگی دارد. تغییر شرایط حاکم نسبت به زمان، منجر به تغییر در موقعیت و ضخامت این ناحیه می‌گردد (Raeisi Isa-Abadi, 2016).

هجوم آب شور دریا به آبخوان ساحلی، نه‌تنها بقای اکوسیستم‌های حساس ساحلی و تالاب‌های با ارزش بین‌المللی را به خطر می‌اندازد، بلکه با کاهش کیفیت آب، معیشت میلیون‌ها نفر از ساکنان منطقه را که وابستگی شدیدی به این منابع دارند، تحت تأثیر قرار داده و می‌تواند پیامدهای اقتصادی–اجتماعی گسترده‌ای ازجمله کاهش محصولات کشاورزی، افزایش هزینه‌های تصفیه آب و مهاجرت اجباری را در پی داشته باشد (Nohani et al., 2025). مدل‌سازی دقیق فرایند پیشروی آب شور دریا، از ابزارهای مهم و پرکاربرد در پیش‌بینی و کنترل وضعیت شوری و مدیریت بهینه آب‌های زیرزمینی در آبخوان‌های ساحلی محسوب می‌گردد. در این بین مدل‌های عددی در قیاس با مدل‌های فیزیکی بسیار کم هزینه‌تر است. همچنین پیشرفت‌های شگرف در زمینه علوم و تکنولوژی رایانه‌ای و خلق کامپیوترهای قدرتمند با سرعت پردازش بالا، باعث استقبال و توسعه این مدل‌ها گردیده است. به‌طورکلی ارزیابی دقت مدل‌های مبتنی بر حل عددی به دو شیوه امکان‌پذیر می‌باشد:

- مقایسه با نتایج و داده‌های آزمایشگاهی
- مقایسه با حل تحلیلی (دقیق) مسائل ساده شده یا همان مسائل شاخص[1]

اگر چه مطالعات آزمایشگاهی با توجه به نزدیکی بیشتر به واقعیت و در برگرفتن فیزیک پیچیده حاکم می‌تواند معیار مناسبی برای ارزیابی حل عددی به شمار رود، اما مواجهه با خطاهای موجود (شامل خطاهای اندازه‌گیری و عدم قطعیت‌های موجود در تخمین پارامترها) جزء گریزناپذیر این روش مقایسه بوده که می‌تواند کیفیت ارزیابی را تنزل دهد. همچنین در مدل آزمایشگاهی امکان بررسی شرایط مختلف پدیده مورد مطالعه محدود می‌باشد. بنابراین یکی از بهترین راه‌های ارزیابی دقت حل عددی، مقایسه با حل‌های تحلیلی یا نیمه‌تحلیلی توسعه داده شده می‌باشد. از این منظر که هم در حل‌های (نیمه) تحلیلی و هم در حل عددی می‌توان کاملاً شرایط و پارامترهای یکسانی را اعمال نمود، بنابراین انتظار نتایج بسیار نزدیک از هر دو حل تحلیلی و عددی کاملاً منطقی است.

در حال حاضر نفوذ آب شور به آبخوان با دو مدل ریاضی جایگزین توصیف می‌گردد:

رویکرد اول: مدل‌های بر پایه فصل مشترک، در این رویکرد فرض بر آن است آب شور و شیرین امتزاج‌ناپذیر است و در آن یک مرز مشترک، با نادیده‌گرفتن وجود یک

[1] Benchmark

منطقه انتقالی، آب شیرین را از آب شور نفوذی جدا می‌کند.

رویکرد دوم: مدل‌های بر پایه جریان‌های چگالی‌متغیر که بر وجود منطقه گذار ناشی از تعادل دینامیکی آب شیرین و آب شور در حرکت، تأکید دارد. این مدل‌ها به‌دلیل نزدیک‌تر بودن به شرایط واقعی از دقت بیشتری برخوردار بوده و کاربرد آن‌ها (نسبت به مدل‌های بر پایه فصل مشترک) به شرایط خاصی محدود نمی‌گردد.

در اوایل قرن بیستم، فرمول کلاسیک گیبن- هرزبرگ[1] پیشنهاد شد تا تداخل آب زیرزمینی شور و شیرین در مناطق ساحلی به‌صورت کمی مورد مطالعه قرار گیرد. این معادله توسط پژوهشگرانی همچون دراب و گیبن در سال ۱۸۸۹، هرزبرگ در سال ۱۹۰۱ و وروئیت در سال ۱۹۶۸ جهت بررسی پدیده نفوذ آب دریا به آبخوان مورد استفاده قرار گرفت. این معادله به طور گسترده برای تعیین مکان فصل مشترک آب شیرین و شور که توسط سطح آب زیرزمینی آزاد کنترل می‌شود، استفاده می‌شد (Cao et al., 2021). در ادامه پژوهش‌هایی توسط، هوبرت (Hubbert, 1940) و بیر (Bear, 197) با هدف بررسی بیشتر این فرمول انجام گردید و در نتیجه توصیف ریاضی دقیقی برای محدودیت‌های این رابطه ارائه گردید (Post et al., 2018).

رویکرد دوم که در پژوهش حاضر نیز مد نظر قرار گرفته، بر وجود منطقه گذار ناشی از تعادل دینامیکی آب شیرین و آب شور در حرکت تأکید دارد. مدل ریاضی متناظر از یک سیستم معادله جریان چگالی متغیر (دارسی) و معادله همرفت-پراکندگی/انتشار[2] تشکیل شده است. دو معادله حاکم از طریق وابستگی چگالی آب به غلظت نمک به طور کامل با هم جفت می‌شوند (Dentz et al., 2006).

پیچیدگی ذاتی معادلات حاکم جفت شده، حتی برای هندسه‌های ساده و شرایط مرزی، مانع از دستیابی به راه حل‌های تحلیلی با فرم بسته می‌شود (Bear et al., 1999). نبود راه‌حل‌های تحلیلی و کمیاب‌بودن داده‌های تجربی، ایجاد مسائل بنچمارک برای آزمایش دقت و استحکام این کدهای عددی را پیچیده می‌کند. در این مواقع به‌ناچار، راه حل‌های عددی با یکدیگر مقایسه می‌شوند و تفاوت‌های بین آن‌ها می‌تواند بسیار قابل توجه باشد. بنابراین، نیاز به ارائه راه حل‌های تحلیلی مسائل خاص به‌عنوان بنچمارک، ضرورت می‌یابد (Weatherill et al., 2004).

با توجه به فیزیک حاکم بر پدیده نفوذ آب شور دریا به آبخوان‌ها، حل کاملاً تحلیلی و دقیقی برای این پدیده وجود ندارد، چرا که معادلات حاکم شامل دو معادله جریان و انتقال جرم است که پیچیدگی معادلات و شرایط مرزی از طرفی و همبستگی دو معادله مذکور از طرف دیگر، حل هم‌زمان دو معادله را حتی برای ساده‌ترین هندسه (آبخوان مستطیل‌شکل در حالت دوبعدی) ناممکن می‌سازد. بنابراین، برای مسئله نفوذ آب شور دریا به آبخوان‌های ساحلی حل کاملاً تحلیلی با درنظرگرفتن شرایط چگالی متغیر وجود ندارد. هنری اولین محققی بود که در سال ۱۹۶۴ توانست این پدیده را به روش نیمه‌تحلیلی برای حالت دوبعدی در یک آبخوان مستطیلی شکل افقی شبیه‌سازی نماید. با توجه به اینکه حل هنری تنها حل نیمه‌تحلیلی ارائه شده برای این پدیده است، به یکی از اصلی‌ترین مسائل بنچمارک برای ارزیابی مدل‌های عددی تبدیل گردیده و از آن زمان به بعد، محققان آن را با مسئله هنری[3] می‌شناسند. به دلیل پیچیدگی‌های ریاضی که در حل هم‌زمان دو معادله دیفرانسیل جزئی برای حفظ جرم سیال و محلول پدید می‌آید، تنها تعداد

[1] Ghijben–Herzberg
[2] Advection–dispersion/diffusion
[3] Henry problem (HP)

بسیار کمی از مسائل با جریان وابسته به چگالی[1] وجود دارند که راه‌حل‌های تحلیلی یا نیمه‌تحلیلی داشته باشند. راه‌حل مسئله هنری از محبوب‌ترین راه‌حل نیمه‌تحلیلی است که برای ارزیابی کدهای مسائل چگالی محور استفاده می‌شود (Ataie-Ashtiani and Aghayi, 2006).

علی رغم برخی ملاحظات، مسئله هنری همچنان یکی از پرکاربردترین مسائل بنچمارک باقی مانده است (Simpson & Clement 2004). اهمیت مسئله هنری فراتر از بنچمارک است، زیرا بینشی فیزیکی در مورد فرآیندهای انتقال مرتبط با نفوذ آب دریا ارائه می‌دهد (Abarca et al., 2005).

از زمان انتشار نتایج هنری (Henry, 1964) تحقیقاتی در راستای ارائه راه حل‌های جدید برای این مسئله انجام گردیده است. از جمله این تحقیقات می‌توان به پیندر و کوپر (Pinder & Cooper, 1970)، لی و چنگ (Lee and Cheng, 1974)، سیگول و همکاران (Segol et al., 1975)، فریند (Frind, 1982)، هویاکورن و همکاران (Huyakorn et al., 1987) و ووس و سوزا (Voss & Souza, 1987) اشاره نمود.

پیندر و کوپر (Pinder & Cooper, 1970) اولین افرادی بودند که مسئله هنری را با استفاده از یک کد عددی در دو شرایط مرزی متفاوت برای اطمینان از همگرایی در حالت ماندگار استفاده کردند. نتایج به‌دست‌آمده در این تحقیقات و نتایجی که توسط سیگول و همکاران (Segol et al., 1975)، فریند (Frind, 1982) و هویاکورن و همکاران (Huyakorn et al., 1987) ارائه گردید با راه‌حل هنری مطابقت نداشتند. در ادامه واس و سوزا (Voss & Souza, 1987) نشان دادند که اختلافات در مقالات منتشر شده ناشی از استفاده از ضرایب پراکندگی مختلف در محاسبات عددی و نیمه‌تحلیلی بوده است.

یونس و همکاران با استفاده از روش عددی اجزاء محدود به مدل‌سازی مسائل مربوط به جریان وابسته به چگالی پرداختند (Younes et al., 2009).

فحص و همکاران در پژوهشی یک راه حل نیمه‌تحلیلی جدید برای مسئله هنری با پراکندگی وابسته به سرعت[2] ارائه نمودند. مشابه مسئله انتشار کلاسیک هنری، راه حل جدید با استفاده از روش فوریه-گالرکین حاصل گردید (Fahs et al., 2016).

یونس و فحص به توسعه راه حل نیمه‌تحلیلی هنری بر روی آبخوان‌های لایه‌ای که دارای روابط نفوذپذیری-عمق‌نمایی و گاوسی همراه با پراکندگی کوچک هستند، پرداختند. نتایج حاصل از تجزیه‌وتحلیل عددی با حل نیمه‌تحلیلی برای تمامی موارد آزمون، مطابقت بسیار خوبی داشت (Younes & Fahs, 2015). با هدف بررسی عملکرد دیوارهای آب‌بند در کنترل هم‌زمان نفوذ آب شور و کاهش غلظت نیترات با عزم و همکاران با استفاده از مدل عددی بدون شبکه پتروو-گالرکین (MLPG)، به بررسی این موضوع پرداختند. نتایج آن‌ها نشان داد که موقعیت و عمق دیوار آب‌بند نقش تعیین‌کننده‌ای در بهینه‌سازی کیفیت آب زیرزمینی و جلوگیری از پیشروی گوه آب شور دارد. این مطالعه همچنین بر کارایی روش‌های بدون شبکه در مدل‌سازی انتقال آلودگی در محیط‌های متخلخل تأکید می‌کند (Baazm et al., 2025).

سیمپسون و کلمنت به اصلاح مسئله هنری به‌عنوان یک معیار برای مدل‌های جریان آب زیرزمینی وابسته به چگالی پرداختند. نتایج نشان داد که کارایی مسئله هنری را می‌توان با کاهش میزان شار آب شیرین بهبود بخشید (Simpson & Clement, 2004).

بررسی و مفهوم‌سازی آبخوان‌های ساحلی به‌صورت افقی به‌طورکلی با واقعیت همخوانی ندارد. در واقع فرض افقی

---

[1] (Density-driven flow) DDF

[2] Velocity dependent dispersion

بودن آبخوان در مدل‌های مفهومی بیشتر با هدف ساده‌سازی در تحلیل ریاضی انجام می‌گردد (Koussis et al., 2012).

ارزیابی از شرایط واقعی از بستر آبخوان ساحلی، با هدف بررسی نفوذ آب دریا در آبخوان‌های شیب‌دار، رویکردی واقع‌گرایانه‌تر است. در واقع آبخوان‌های ساحلی می‌توانند شیب به سمت دریا یا به سمت خشکی داشته باشند.

در اولین حالت (شیب به سمت دریا)، در صورت افقی فرض‌کردن آبخوان، نتایج حاصل، نفوذ شدیدتر آب دریا را نسبت به واقعیت نشان می‌دهد و به همین دلیل تحلیل ممکن است محتاطانه نامیده شود، اما برعکس این موضوع در مورد حالت دیگر (شیب از دریا به ساحل) صادق است. از جمله آبخوان‌های غیرمحصور با شیب پایه به سمت دریا می‌توان به آبخوان ساحلی در فلسطین اشغالی (Melloul and Zeitoun, 1999)، آبخوان کیپ کد در ماساچوست آمریکا (Reilly, 1993)، آبخوان‌های دلتای نیل (Sherif & Singh, 1999) و آبخوان ساحلی آکروتیری در قبرس (Fahs et al., 2016) اشاره نمود.

مطالعات در زمینه نفوذ آب شور دریا به آبخوان ساحلی شیب‌دار از نظر کمی از گستردگی زیادی برخوردار نبوده و رویکرد این مطالعات بر اساس فرضیه وجود فصل مشترک آب شور و شیرین می‌باشد.

هندرسون و وودینگ و هوانگ و همکاران اعلام نمودند بررسی وضعیت نفوذ در آبخوان‌های ساحلی شیب‌دار تاریخچه طولانی دارد (Huang et al., 2014; Henderson and Wooding, 1964). جهت ارائه راه‌حل‌هایی در حالت ماندگار معادله بوسینسک غیرخطی برای جریان یکنواخت در آبخوان شیب‌دار همگن و آزاد همراه با تغذیه، تحقیقاتی توسط مک انرو (McEnroe, 1993) و ورهوست و تاچ (Verhoest and Troch, 2000) و لوآسیگا (Loaiciga, 2005) انجام شده که نتایج به صورت تحلیلی ارائه شده‌اند.

همچنین تحقیقاتی جهت ارائه راه‌حل‌های تحلیلی در حالت جریان گذرا در آبخوان‌های شیب‌دار آزاد با تغذیه توسط باشا و مالوف (Basha and Maalouf, 2005) و آکیلاس و همکاران (Akylas et al., 2006) انجام گردیده است.

در پژوهشی، کوسیس و همکاران راه حل‌های تحلیلی را برای نفوذ آب دریا در آبخوان ساحلی آزاد شیب‌دار با تغذیه یکنواخت و چاه توسعه دادند. نتایج حاصل از مدل توسعه داده شده برای آبخوان شیب‌دار نشان داد موقعیت گوه شور منطبق بر خط غلظت ۵۰٪ نمک در نتایج حاصل از مدل‌های چگالی متغیر می‌باشد. همچنین موقعیت انتهای گوه شوری که توسط مدل آبخوان شیب‌دار این پژوهش پیش‌بینی شده است، با نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های مدل سوترا[1] همخوانی مناسبی داشت، این در حالی است که نتایج مدل برای این آبخوان به‌صورت افقی، هجوم کامل آب شور دریا را در سرتاسر آبخوان نشان می‌داد (Koussis et al., 2012).

از دیگر تحقیقات انجام شده در این مورد می‌توان به تحقیقات مازی و همکاران (Mazi et al., 2013)، لو و همکاران (Lu et al., 2016) فحص و مالک (Fahs & Malek, 2017) اشاره نمود.

مدل‌سازی دقیق پدیده پیشروی آب شور دریا از ابزارهای مهم و پرکاربرد در پیش‌بینی و کنترل وضعیت شوری و مدیریت بهینه آب‌های زیرزمینی محسوب می‌شود.

امروزه با توجه به پیشرفت تکنولوژی و کم‌هزینه‌بودن مدل‌های با حل عددی نسبت به مدل‌های فیزیکی، این مدل‌ها در سطح وسیعی از علوم مورد استفاده قرار می‌گیرند.

توجه به اهمیت حفاظت از آب‌های زیرزمینی ساحلی و ضرورت ویژه حل تحلیلی مسائل موجود جهت ارزیابی

---

[1] SUTRA

دقت حل عددی و کاربرد نتایج آن در مدیریت آبخوان‌های ساحلی، ضرورت پرداختن به این مسئله را نشان می‌دهد.

تا کنون اکثر تحقیقات مرتبط با حل مسئله هنری با هدف ساده‌سازی در چهارچوب مدل دوبعدی مستطیل‌شکل با سنگ بستر افقی ارائه گردیده است.

بررسی منابع نشان داد، مطالعات قبلی بر تأثیر شیب آبخوان بر نفوذ آب شور دریا در آبخوان ساحلی بر اساس فرضیه وجود فصل مشترک آب شور و شیرین می‌باشد. با توجه به رشد روزافزون رایانه‌ها و افزایش قدرت محاسباتی آن، مدل‌سازی فرایند پیشروی آب شور مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است.

تاکنون مدل‌های بسیاری بر پایه فصل مشترک آب شور و شیرین و جریان‌های چگالی‌متغیر با اهداف شبیه‌سازی پیشروی آب شور، پیش‌بینی وضعیت جریان آب زیرزمینی و انتقال آلودگی در مناطق ساحلی به‌صورت عددی توسعه یافته است. با توجه به این موضوع نیاز به مطالعه تأثیر شیب آبخوان بر نفوذ آب شور به آبخوان ساحلی بر اساس رویکرد مدل‌های چگالی متغیر و ارائه حل تحلیلی به‌عنوان شاخصی جهت مقایسه با نتایج مدل‌های عددی ضروری می‌باشد.

هدف از مطالعه حاضر، ارائه یک راه‌حل نیمه‌تحلیلی برای مسئله هنری در آبخوان‌های ساحلی شیب‌دار است. راه‌حل نیمه‌تحلیلی توسعه داده شده در این مطالعه می‌تواند به‌عنوان یک بنچمارک معتبر برای ارزیابی مدل‌های عددی مورد استفاده قرار گیرد.

مواد و روش‌ها

فرایندهای انتقال روش‌های فیزیکی هستند که چگونگی انتقال و توزیع مواد حل شده از نقطه‌ای به نقطه دیگر در آب زیرزمینی بیان می‌کنند. فرایندهای فیزیکی که شار ماده را در یک حجم معیار از محیط متخلخل کنترل می‌کنند شامل فرایندهای جابه‌جایی یا همرفت[1] و پراکندگی هیدرودینامیکی[2] است. انتقال ماده را همراه با حرکت آب زیرزمینی که تابع قانون دارسی است، انتقال همرفتی یا جابه‌جایی می‌نامند.

پراکندگی هیدرودینامیکی نتیجه پراکندگی مکانیکی یا هیدرولیکی[3] (اختلاط مکانیکی) و پخشیدگی ملکولی[4] است. به‌طورکلی پخش ماده محلول در آبخوان به دو شکل مکانیکی و مولکولی رخ می‌دهد. این پدیده باعث گسترش آلودگی در جهات طولی و عرضی می‌شود (Karimzadeh et al., 2024).

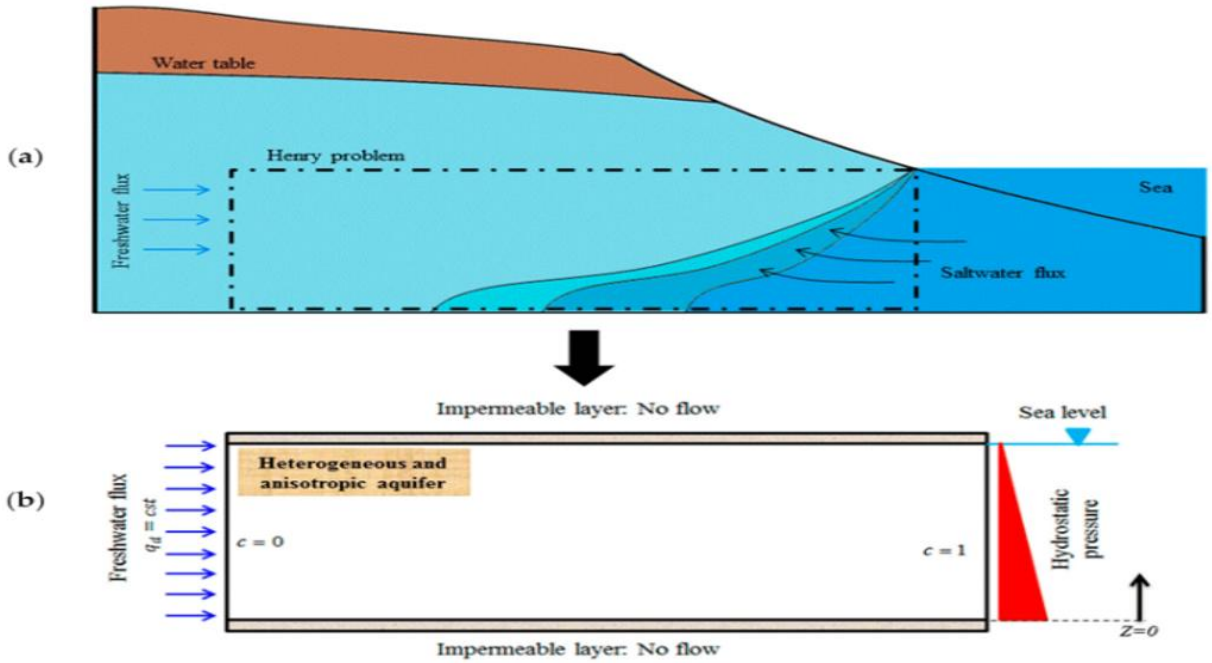
با گذر زمان آلودگی از سمت منبع آلودگی که در این تحقیق دریا می‌باشد به سمت آب شیرین پخش می‌گردد. از ترکیب روابط شار فرایندهای انتقال ماده، رابطه‌ای برای شار کل ماده به دست می‌آید.

مسئله استاندارد هنری به بررسی نفوذ آب دریا به یک آبخوان محصور و همگن می‌پردازد (شکل ۱).

منطقه مورد مطالعه یک مستطیل با عمق (d) و طول (l) است. آب شیرین (با غلظت $c = 0$) از سمت چپ (داخل خشکی) با شار کل (q) وارد این منطقه می‌شود. مرز سمت دریا تحت فشار هیدرواستاتیک و با غلظت ثابت ($c = 1$) مطابق با شوری آب دریا قرار دارد. بالا و پایین این منطقه نفوذناپذیر هستند. فشار هیدرواستاتیک که تحت تأثیر گرادیان‌های چگالی است، باعث نفوذ آب دریا از مرز دریا به داخل منطقه می‌شود تا زمانی که با آب شیرین وارد شده از سمت چپ به حالت تعادل برسد.

---

[1] Advection
[2] Hydrodynamics dispersion
[3] Mechanical or Hydraulic dispersion
[4] Molecular diffusion



شکل ۱. (a) مدل واقعی و (b) مدل مفهومی آبخوان و محل تلاقی آب شیرین و شور در مسئله هنری (Fahs et al., 2018)

Fig 1. (a) Real model and (b) conceptual model of aquifer and freshwater and saltwater junction in the Henry problem (Fahs et al., 2018)

فرضیات کلیدی

محیط آبخوان اشباع است، نوع آبخوان محصور دارای ساختار همگن و هم‌روند است، جریان تحت شرایط هم‌دمایی و دمای ثابت رخ می‌دهد، نوع رژیم جریان ماندگار[1] می‌باشد، تراکم‌پذیری سیال و محیط متخلخل ناچیز است، پیشروی آب شور به‌صورت دوبعدی و در مقطع عرضی رخ می‌دهد و چگالی آب نسبت به غلظت محلول به‌صورت خطی تغییر می‌کند.

معادلات حاکم

معادله دیفرانسیل حاکم بر جریان از تلفیق دو معادله پیوستگی و معادله دارسی حاصل می‌شود(Hubbert, 1953; Henry,1964). حالت برداری معادله دارسی برای جریان‌های چگالی متغیر عبارت است از (رابطه ۱):

$$\vec{q} = -\frac{k}{\mu}(\nabla p - \rho \vec{g}) \quad (۱)$$

که در آن، $\vec{q}$ بردار سرعت جریان $\left(\frac{L}{T}\right)$، k نفوذپذیری ذاتی (L^2)، μ ویسکوزیته دینامیکی آب $(ML^{-1}T^{-1})$، ρ دانسیته محلول (ML^{-3}) و P فشار آب شور (NL^{-2}) می‌باشد. با استفاده از معادلات پیوستگی برای آب و نمک، معادله بقای جرم برای آب در حالت جریان ماندگار به‌صورت رابطه ۲ بیان می‌گردد:

$$\nabla . \rho_w \vec{q} = 0 \quad (۲)$$

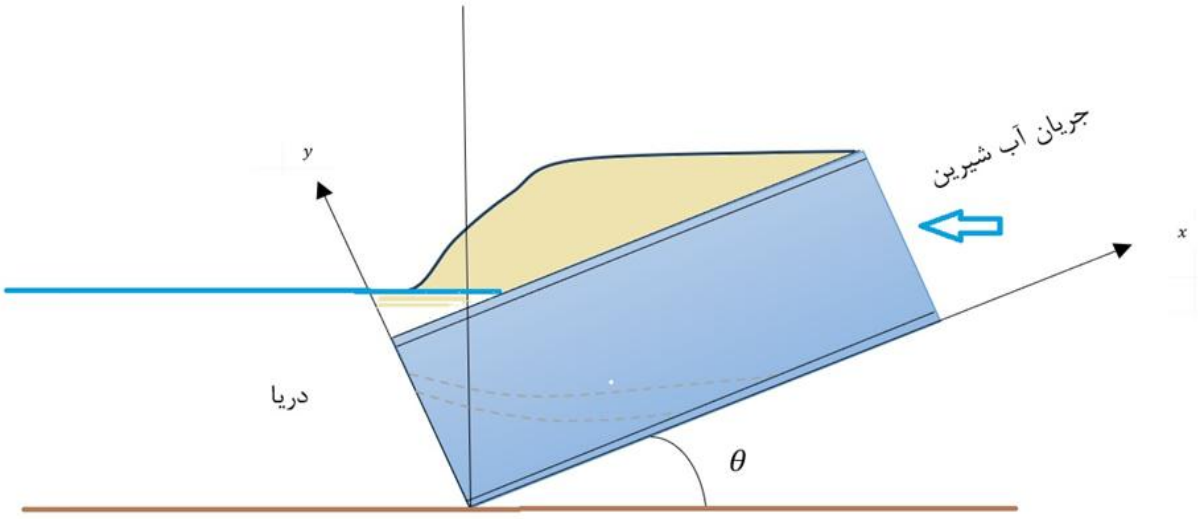
که در آن، ρ_w جرم آب خالص در واحد حجم محلول می‌باشد. معادله بقای جرم برای نمک در محلول در حالت جریان ماندگار به‌صورت رابطه ۳ بیان می‌گردد:

$$\nabla . c\overrightarrow{q_e} = 0 \quad (۳)$$

که در آن، c غلظت شوری و $\overrightarrow{q_e}$ بردار سرعت مؤثر حرکت شوری می‌باشد. این سرعت مجموع متوسط سرعت سیال و سرعت حاصل از پخشیدگی است.

درصورتی‌که $\theta \neq 0$ و بستر آبخوان شیب‌دار باشد (شکل ۲) آنگاه بر اساس رابطه (۱) خواهیم داشت:

[1] Steady state



شکل ۲. آبخوان شیب‌دار (زاویه Θ نسبت به افق)

Fig 2. Inclined aquifer (angle Θ to the horizon)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}= -\frac{k}{\mu}\left[\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}+g\sin\theta\frac{\partial\rho}{\partial y}\right] +\frac{k}{\mu}\left[\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}+g\cos\theta\frac{\partial\rho}{\partial x}\right] \quad (۴)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}= \frac{kg}{\mu}\cos\theta\frac{\partial\rho}{\partial x} -\frac{kg}{\mu}\sin\theta\frac{\partial\rho}{\partial y} \quad (۵)$$

$$\acute{u}=\frac{ud}{Q},\acute{v}=\frac{vd}{Q},\quad \acute{x}=X=\frac{x}{d},\acute{y}=Y=\frac{y}{d},\quad \acute{c}=\frac{c}{c_s},\acute{\rho}=\frac{\rho-\rho_0}{\rho_s-\rho_0} \quad (۶)$$

پس از جای‌گذاری مقادیر بی بعد رابطه ۷ حاصل می‌گردد.

$$\frac{\partial^2\acute{\psi}}{\partial\acute{x}^2}+\frac{\partial^2\acute{\psi}}{\partial\acute{y}^2}= \frac{kgd(\rho_s-\rho_0)}{\mu Q}\left(\cos\theta\frac{\partial\acute{c}}{\partial\acute{x}}-\sin\theta\frac{\partial\acute{c}}{\partial\acute{y}}\right) \quad (۷)$$

همچنین در معادله با فرض ثابت‌بودن مقدار D خواهیم داشت (روابط ۸ تا ۱۰):

$$\nabla.c\vec{q}=\frac{\partial}{\partial x}(cq_x)+\frac{\partial}{\partial y}(cq_y) =c\frac{\partial q_x}{\partial x}+q_x\frac{\partial c}{\partial x}+c\frac{\partial q_y}{\partial y}+q_y\frac{\partial c}{\partial y} =c\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial c}{\partial x}-c\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y} \quad (۸)$$

$$\nabla.c\vec{q}=\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial c}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y} \quad (۹)$$

$$\nabla.D\nabla c=D\nabla^2 c \quad (۱۰)$$

با قراردادن زاویه شیب صفر درجه، در رابطه ۷ و باز نویسی رابطه ۱۱، معادلات نفوذ آب شور به آبخوان محصور ساحلی در حالت افقی و ماندگار به صورت بدون بعد به به صورت روابط ۱۲ تا ۱۵ ایجاد می‌گردد:

$$a\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right]-\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{1}{\xi}=0 \quad (۱۲)$$

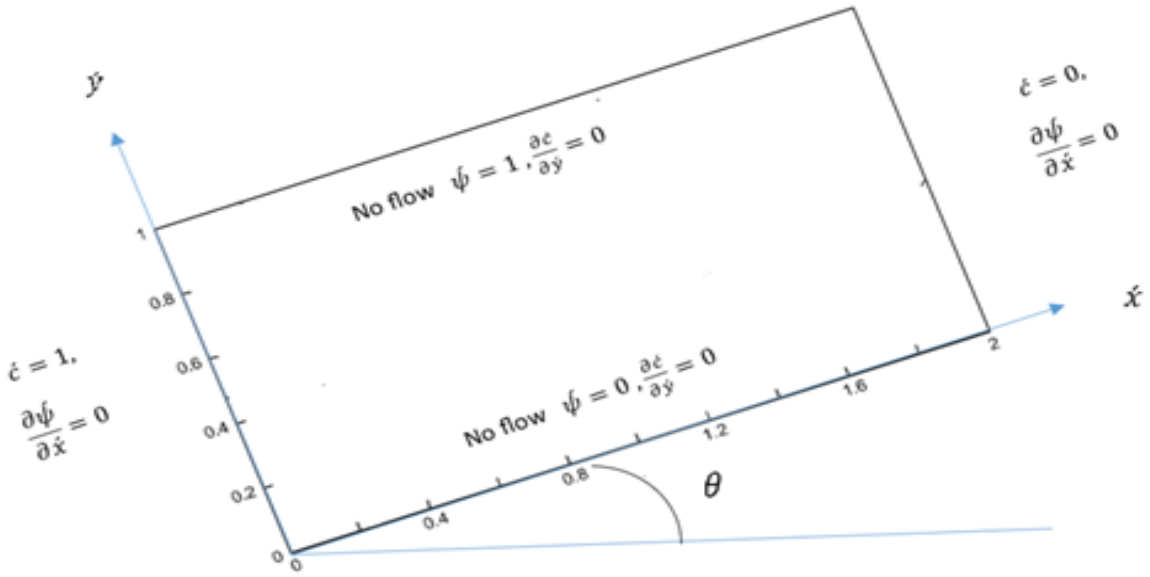
$$\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right)= \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial C}{\partial y} +\frac{1}{\xi}\frac{\partial \Psi}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{1}{\xi} \quad (۱۳)$$

$$a=\frac{Q}{K_1 d} \quad (۱۴)$$

$$b=\frac{D}{Q} \quad (۱۵)$$

که در آن، u مولفه افقی سرعت، v مولفه عمودی سرعت جریان، d ضخامت آبخوان و x,y مختصات، ψ تابع جریان، $k_1=\bar{k}\frac{\rho_s-\rho_0}{\rho_0}$ و $\bar{k}=\frac{k\rho_0 g}{\mu}$ و L طول آبخوان، $\xi=\frac{L}{d}$ فاکتور شکل و Q دبی جریان آب شیرین در طول واحد ساحل (L^2T^{-1}) می‌باشد. مقادیر C و Ψ غلظت و تابع پتانسیل بدون بعد می‌باشند.

شرایط مرزی:



شکل ۳. شرایط مرزی

Fig 3. Boundary conditions

مدل مورد بررسی در این مطالعه یک آبخوان ساحلی محصور دارای شیب می باشد که در تماس با یک منبع تغذیه آب شیرین با دبی ثابت از طرف ساحل به سمت دریا و در سمت دیگر دریا می‌باشد. همانطور که در شکل ۳ نشان داده شده است. در بالا و پایین این آبخوان مرزها کاملا نفوذناپذیر فرض می‌گردد. در امتداد مرزهای نفوذناپذیر در بالا و پایین آبخوان سرعت نرمال برابر صفر بوده که در نتیجه مقدار $\dot{\psi}$ ثابت می‌باشد. علاوه بر این، در امتداد این مرزها حرکت انتشاری شوری نیز باید برابر صفر باشد. مقدار مشتق غلظت نسبت به y نیز صفر می‌گردد $\left(\frac{\partial \acute{c}}{\partial \acute{y}}=0\right)$. در مرزهای چپ و راست در تماس با آب شیرین و آب شور دریا مقادیر $(\acute{c}=0)$ و $(\acute{c}=1)$ می‌باشد. همچنین در این مرزها مقادیر $\left(\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \acute{x}}=0\right)$ می‌باشد (روابط ۱۶ و ۱۷).

$$\begin{cases} at \quad \acute{y}=0 \quad \dot{\psi}=0 \quad \frac{\partial \acute{c}}{\partial \acute{y}}=0 \\ at \quad \acute{y}=1 \quad \dot{\psi}=1 \quad \frac{\partial \acute{c}}{\partial \acute{y}}=0 \end{cases} \quad (۱۶)$$

$$\begin{cases} at \quad \acute{x}=0 \quad \acute{c}=0 \quad \frac{\partial \acute{\psi}}{\partial \acute{x}}=0 \\ at \quad \acute{x}=\xi \quad \acute{c}=1 \quad \frac{\partial \acute{\psi}}{\partial \acute{x}}=0 \end{cases} \qquad (۱۷)$$

روش حلی که هنری جهت حل این مسئله به کاربرد بر اساس روشی است که پوتس (Poots, 1958) برای حل مسئله انتقال حرارت با شرایط مرزی غیرخطی بکار برد و معروف به روش فوریه گالرکین می‌باشد. در این پژوهش، جهت حل نیمه‌تحلیلی از این روش استفاده می‌گردد.

ابتدا متغیرهای جدید جهت ساده‌سازی شرایط مرزی تعریف می‌شوند (روابط ۱۸ و ۱۹):

$$\Psi = \acute{\psi} - Y \qquad (۱۸)$$

$$\mathrm{C} = \acute{c} - \frac{X}{\xi} \qquad (۱۹)$$

طبق راهکاری که هنری برای حل این مسئله از آن بهره برد، یک ضریب پراکندگی ثابت در نظر گرفته و تقریب بوسینسک را معتبر فرض نموده که دلالت بر وجود تابع جریان دارد. پس از جای‌گذاری متغیرهای جدید معادلات جریان و انتقال در حالت ماندگار به شرح روابط ۲۰ تا ۲۳ حاصل می‌گردد:

$$\mathrm{a}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{1}{\xi}\right)\cos\theta - \frac{\partial C}{\partial y}\,sin\theta \qquad (۲۰)$$

$$b\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{1}{\xi} \qquad (۲۱)$$

$$a = \frac{Q\mu}{kg(\rho_s-\rho_0)d} \qquad (۲۲)$$

$$b = \frac{D}{Q} \qquad (۲۳)$$

شرایط مرزی جدید در آبخوان ساحلی شیب‌دار به‌صورت روابط ۲۴ و ۲۵ تعریف می‌گردد:

$$\begin{cases} at \quad y=0 \quad \Psi=0 \quad \frac{\partial C}{\partial Y}=0 \\ at \quad y=1 \quad \Psi=0 \quad \frac{\partial C}{\partial Y}=0 \end{cases} \qquad (۲۴)$$

$$\begin{cases} at \quad x=0 \quad C=0 \quad \Psi=0 \\ at \quad x=\xi \quad C=0 \quad \Psi=0 \end{cases} \qquad (۲۵)$$

راه حل نیمه‌تحلیلی

تکنیک حلی که هنری و بعضی از پژوهشگران دیگر به کار بردند، معروف به گالرکین یا فوریه گالرکین می‌باشد. در این روش با جایگزینی تابع جریان و غلظت شوری با سری فوریه دوگانه ذیل با لحاظ‌کردن شرایط مرزی معادلات اصلی بازنویسی می‌گردد (روابط ۲۴ و ۲۷):

$$\Psi = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} sin(m\pi Y) cos\left(n\pi X/\xi\right) \qquad (۲۶)$$

$$C = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} b_{r,s} cos(r\pi Y) sin\left(s\pi X/\xi\right) \qquad (۲۷)$$

پس از جای‌گذاری سری‌های فوریه فوق در معادلات حاصل در مرحله قبل، معادلات به‌دست‌آمده به ترتیب در توابع آزمایشی[1] به شرح رابطه ۲۸ ضرب می‌گردد:

$$\begin{cases} 4\sin(g\pi Y)\cos\left(\frac{h\pi X}{\xi}\right) \\ for\ g=1,\dots,Nm\ and\ h=1,\dots,Nn \\ 4\cos(g\pi Y)\sin\left(\frac{h\pi X}{\xi}\right) \\ for\ g=0,\dots,Nr\ and\ h=1,\dots,Ns \end{cases} \qquad (۲۸)$$

[1] Trial function

با ضرب توابع اصلی حاصل از جایگذاری سری‌های فوریه تابع جریان و غلظت شوری در تابع آزمایشی معادلات جدید حاصل می‌گردد. با انتگرال‌گیری روی دامنه مستطیلی آبخوان، مجموعه‌ای نامتناهی از معادلات جبری برای $A_{g,h}$ و $B_{g,h}$ ایجاد می‌گردد (Henry, 1964; Segol, 1994) (روابط ۲۹ و ۳۰):

$$RF_{g,h} = \varepsilon_2 a\pi^2 A_{g,h}\left(g^2+\frac{h^2}{\xi^2}\right)\xi - \cos\theta \sum_{r=0}^{\infty} B_{r,h} hN(g,r) - \frac{4}{\pi}\cos\theta\, W(g,h) - g\xi \sin\theta \sum_{s=1}^{\infty} B_{g,s}\left(-(N(s,h))\right) \quad (۲۹)$$

$$\varepsilon_1 b\pi^2 B_{g,h}\left(g^2+\frac{h^2}{\xi^2}\right)\xi - \sum_{n=0}^{\infty} A_{g,n} gN(h,n) - \varepsilon_1 \sum_{s=1}^{\infty} B_{g,s} sN(h,s) - \frac{\pi}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} A_{m,n}B_{r,s}\left(msL_{m,r,g}R_{h,n,s} - nrF_{m,r,g}G_{h,n,s}\right) - \frac{4}{\pi}W(h,g) \quad (۳۰)$$

که در آن، RF و RT به ترتیب باقیمانده‌های مربوط به روابط ۲۰ و ۲۱ هستند. توابع ε_1، ε_2، N، W، L، R، F و G در روابط ۳۱ الی ۳۹ به تفصیل آمده‌اند.

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (۳۱)$$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 2, & g = 0 \\ 1, & g \neq 0 \end{cases} \quad (۳۲)$$

$$\varepsilon_2 = \begin{cases} 2, & h = 0 \\ 1, & h \neq 0 \end{cases} \quad (۳۳)$$

$$N(h,n) = \left(\frac{(-1)^{h+n}-1}{h+n} + \frac{(-1)^{h-n}-1}{h-1}\right) \quad (۳۴)$$

$$W(h,g) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^h - 1}{h}, & g = 0 \\ 0 \quad , & g \neq 0 \end{cases} \quad (۳۵)$$

$$L_{m,r,g} = \quad (۳۶)$$

$$\delta_{(m-1),g} + \delta_{(r-m),g} + \delta_{(m-r),g}$$

$$L_{m,r,g} = \quad (۳۷)$$

$$\delta_{(m-1),g} + \delta_{(r-m),g} - \delta_{(m-r),g}$$

$$R_{h,n,s} = \left(\frac{(-1)^{h+n-s}-1}{h+n-s} + \frac{(-1)^{h-n+s}-1}{h-n-s} + \frac{(-1)^{h+n+s}-1}{h+n+s} + \frac{(-1)^{h-n-s}-1}{h-n-s}\right) \quad (۳۸)$$

$$G_{h,n,s} = \left(\frac{(-1)^{h+n-s}-1}{h+n-s} + \frac{(-1)^{h-n+s}-1}{h-n+s} + \frac{(-1)^{h+n+s}-1}{h+n+s} + \frac{(-1)^{h-n-s}-1}{h-n-s}\right) \quad (۳۹)$$

برای محاسبه مقادیر ضرایب $A_{g,h}$ و $B_{g,h}$ از روش نیوتون استفاده شده است. روش نیوتن یکی از روش‌های قدرتمند برای حل دستگاه معادلات غیرخطی است. این روش از ایده خطی‌سازی و تقریب در نزدیکی یک نقطه استفاده می‌کند تا به جواب معادلات برسد. در این تحقیق با هدف افزایش دقت و کاهش عملیات محاسباتی به‌جای استفاده از تقریب تفاضلات محدود، ماتریس ژاکوبی به‌صورت تحلیلی محاسبه شد. این روش منجر به کاهش زمان محاسباتی برای ارزیابی ماتریس ژاکوبی می‌شود (Younes et al., 2014) برای این منظور، باقیمانده‌های RF و RT نسبت به ضرایب $A_{i,j}$ و $B_{i,j}$ به صورت روابط ۴۰ تا ۴۳ مشتق‌گیری شده‌اند:

$$\frac{\partial RF_{g,h}}{\partial A_{i,j}} = \varepsilon_2 a\pi^2\left(i^2+\frac{j^2}{\xi^2}\right)\xi\delta_{i,g}\delta_{j,h} \quad (۴۰)$$

$$\frac{\partial RF_{g,h}}{\partial B_{i,j}} = -j.N(g,i)\delta_{j,h}\cos\theta - g\xi j\left(-N(j,h)\right)\delta_{s,j}\sin\theta \quad (۴۱)$$

$$\frac{\partial RT_{g,h}}{\partial A_{i,j}} = \quad (۴۲)$$

$$-i.N(h,j)\delta_{g,i} - \frac{4}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}B_{r,s}\left(isL_{i,r,g}R_{h,j,s} - jrF_{i,r,g}G_{h,j,s}\right)$$
$$\varepsilon_1 b\pi^2\left(i^2+\frac{j^2}{\xi^2}\right)\xi\delta_{i,g}\delta_{j,h} -$$
$$\varepsilon_1 jN(h,j)\delta_{j,h} -$$
$$\varepsilon_1 jN(h,j)\delta_{j,h} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}BA_{m,n}$$
$$\left(mjL_{m,i,g}R_{h,n,j} - nrF_{m,i,g}G_{h,n,j}\right) \quad (۴۳)$$

در ادامه یک حدس اولیه برای جواب دستگاه معادلات انتخاب می‌شود (ماتریس پاسخ‌های اولیه تشکیل می‌گردد) (رابطه ۴۴) و سپس دستگاه معادلات غیرخطی (رابطه ۴۵) ایجاد می‌شود:

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (۴۴)$$

$$\begin{bmatrix} f(x1,y1) \\ f(x1,y2) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ f(xn,yn) \end{bmatrix} \quad (۴۵)$$

محاسبه ماتریس ژاکوبین برای مقادیر اولیه (رابطه ۴۶):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(f(x_1.y_1)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial(f(x_1.y_1)}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial(f(x_n.y_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial(f(x_n.y_n)}{\partial y_n} \end{bmatrix} \quad (۴۶)$$

حل سیستم خطی نیوتن به‌صورت رابطه ۴۷:

$$J[f(x_n,y_n)]\begin{bmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{bmatrix} = -f(x_n,y_n) \quad (۴۷)$$

پس از محاسبه مقادیر Δy و Δx حاصل از مقادیر اولیه (رابطه ۴۸):

$$\begin{cases} x_{n+1} = \Delta x + x_n \\ y_{n+1} = \Delta y + y_n \end{cases} \quad (۴۸)$$

مقادیر جدید محاسبه شده مجدداً به‌عنوان ماتریس مقادیر اولیه وارد شده و این مراحل تکرار می‌گردد. زمانی که مقادیر تفاوت‌ها به مقدار مورد نظر برسد، برنامه متوقف و جواب معادلات حاصل می‌گردد.

در این مرحله جهت حل دستگاه معادلات غیرخطی و محاسبات مربوطه با استفاده از یکی از روش‌های موجود (روش نیوتن ذکر شده در قسمت قبل) اقدام به تهیه کد برنامه نویسی می‌گردد.تعداد جملات سری فوری پس از چندین بار سعی و خطا به ترتیب $N_n = 30$ و $N_m = 30$ و $N_r = 30$ و $N_s = 30$ انتخاب گردید. معیار توقف رسیدن به مقدار باقیمانده‌ها 10^{-6} در نظر گرفته شد که پس از ۲۹ تکرار حاصل گردید. در صورت عدم همگرایی مقادیر حدس اولیه تغییر داده و مجددا برنامه اجرا شد.

پس از محاسبه ضرایب سری فوریه و جای‌گذاری در معادلات اصلی مقادیر شوری در مختصات مختلف و حالت‌های مختلف شیب محاسبه و در نهایت نتایج حاصل از حل نیمه‌تحلیلی با نتیجه حل عددی حاصل از مدل کامسول[1] مقایسه و ارائه می‌گردد.

نرم‌افزار کامسول مولتی فیزیکس یک مجموعه کامل شبیه‌سازی است که می‌تواند معادلات دیفرانسیل سیستم‌های غیرخطی را توسط مشتق‌های جزئی به روش اجزاء محدود در فضاهای یک، دو و سه‌بعدی تحلیل نماید. این نرم‌افزار می‌تواند در حضور چالش‌هایی نظیر میدان‌های الکترومغناطیسی، کشش، دینامیک سیالات و دینامیک گاز به‌خوبی راهگشا باشد. کامسول همچنین قادر به ایجاد مراحلی برای حل مشکل به‌عنوان یک فرمول ریاضی (در فرم معادلات) و فیزیکی (انتخاب مدل فیزیکی، به عنوان مثال مدل فرایند انتشار) می‌باشد (karimi et al., 2023). در محیط کامسول هندسه مورد نظر به شکل مستطیل با طول ۲ متر و عرض ۱ متر ایجاد گردید.

[1] COMSOL Multiphysics

شبکه‌بندی با کوچک‌ترین اندازه[1] و به‌صورت مثلثی انجام گردید. تعداد مش کل ۱۰۱۴۸ عدد و تعداد مش ۲۷۰ در مرزها ایجاد گردید. معیار توقف برنامه زمان رسیدن به حالت پایدار ۵۰۰۰۰ ثانیه با گام زمانی ۱۰۰۰ ثانیه در نظر گرفته شد. در جدول ۱ مقادیر پارامترهای مورد نیاز در حل مسئله هنری آورده شده است.

نتایج و بحث

بررسی نتایج ارائه‌شده برای چندین هندسه مختلف، شامل حالت بدون شیب (صفر درجه)، شیب رو به دریا (۱۰- تا ۳۰- درجه) و شیب رو به خشکی (از ۱۰ تا ۳۰ درجه)، نشان می‌دهد که شیب بستر تأثیر قابل‌توجهی بر موقعیت و شکل گوه آب شور در مسئله هنری دارد.

در حالت پایه (صفر درجه)، خطوط هم‌غلظت به‌صورت یکنواخت و متقارن از مجرای آب شور به سمت آب شیرین امتداد یافته‌اند و الگوی غلظت کاملاً مشابه با نتایج حل نیمه‌تحلیلی کلاسیک هنری ارائه شده توسط سگل (Segol, 1994) و زیدان (Zidane et al., 2012) می‌باشد (شکل ۴).

نتایج مطالعه حاضر برای حالت آبخوان افقی در شکل ۵ ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد هر دو روش نیمه‌تحلیلی و عددی، با دقت بالا خطوط غلظت را بازتولید کرده‌اند و انطباق بسیار خوبی بین آن‌ها مشاهده می‌شود.

در حالت شیب منفی 10°- که بستر به سمت دریا (سمت چپ شکل ۶) نزولی است، گوه آب شور به طور محسوسی کوتاه‌تر شده و نفوذ افقی آب شور کاهش می‌یابد. در واقع شیب منفی باعث افزایش مؤلفه افقی جریان آب شیرین به سمت دریا شده و در نتیجه نیروی پیشران آب شیرین برای مقابله با نفوذ آب شور تقویت می‌شود. مقایسه خطوط هم‌غلظت در شکل ۶ نشان می‌دهد که محل خطوط ۰/۲۵، ۰/۵ و ۰/۷۵ نسبت به حالت بدون شیب به سمت دریا عقب‌نشینی کرده‌اند. این رفتار در هر دو مدل نیمه‌تحلیلی و عددی با همپوشانی بسیار خوب دیده می‌شود که توانایی مدل نیمه‌تحلیلی در بازنمایی دقیق اثرات تغییر هندسه را تأیید می‌کند.

در مقابل، در حالت شیب مثبت (10°+) که بستر به سمت خشکی صعودی است، نفوذ گوه آب شور به طور محسوس بیشتر شده است. افزایش شیب رو به خشکی موجب کاهش شیب هیدرولیکی جریان آب شیرین و کاهش دبی تخلیه به دریا می‌شود. در نتیجه، نیروی مقابله‌کننده حاصل از دبی آب شیرین کاهش‌یافته و گوه آب شور طولانی‌تر می‌گردد. خطوط هم‌غلظت در شکل ۷ به وضوح نشان می‌دهند که خطوط هم غلظت ۰/۲۵، ۰/۵ و ۰/۷۵ در مقایسه با حالت افقی و شیب منفی به سمت خشکی کشیده شده‌اند. این افزایش نفوذ با نتایج عددی نیز کاملاً منطبق بوده و بیانگر دقت مدل نیمه‌تحلیلی در پیش‌بینی جریان‌های چگالی محور در آبخوان‌های با هندسه‌های خاص می‌باشد.

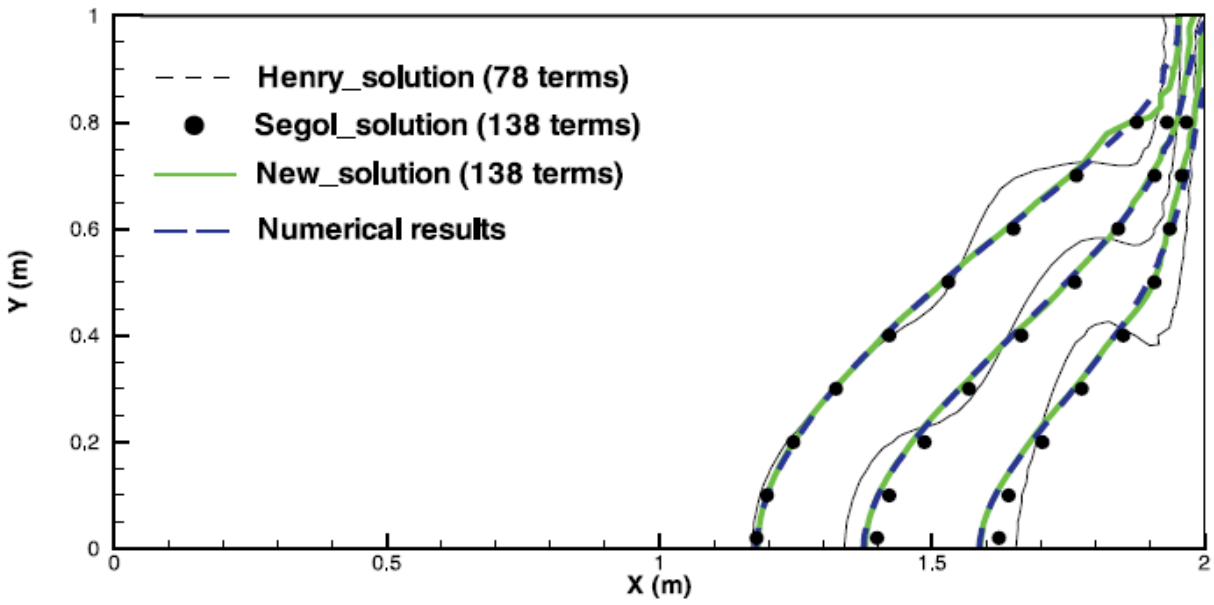
به‌طورکلی، مقایسه حالات مختلف (افقی، شیب مثبت و شیب منفی) نشان می‌دهد که افزایش شیب مثبت باعث افزایش نفوذ آب شور و افزایش شیب منفی باعث کاهش نفوذ آب شور به آبخوان آب شیرین ساحلی می‌گردد. این نتیجه با اصول تئوریک و تحلیل‌های منتشرشده کاملاً سازگار است (Lou, 2016; Abarca, 2002). همچنین هم‌پوشانی بسیار بالا بین خطوط هم‌غلظت به‌دست‌آمده از دو روش نیمه‌تحلیلی و عددی نشان می‌دهد که مدل نیمه‌تحلیلی توسعه‌یافته قادر است در آبخوان شیب‌دار ساحلی نتایج دقیقی ارائه دهد. نتایج به‌دست‌آمده از مدل نیمه‌تحلیلی و عددی برای آبخوان با شیب ۲۰، ۳۰، ۲۰- و ۳۰- درجه در شکل‌های ۸ و ۹ ارائه شده است. مقایسه بین خطوط هم غلظت در شیب‌های متفاوت نشان می‌دهد علاوه بر اینکه شیب بستر تأثیر بسیار قابل‌توجهی بر طول گوه شوری دارد می‌تواند بر شکل و ضخامت گوه آب شور هم تأثیرگذار باشد.

[1] Extremely Fine

جدول ۱. پارامترهای مورد نیاز شبیه‌سازی مسئله هنری

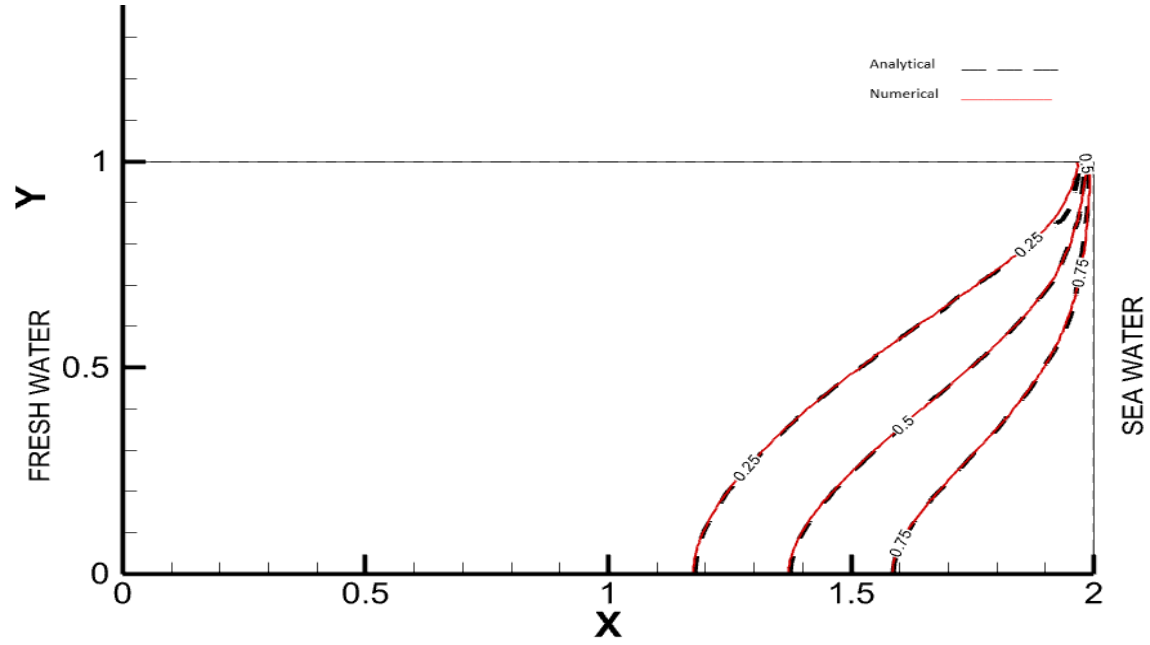
Table 1. Parameters for simulating the problem

نماد	پارامتر Parameters	مقدار Value	واحد Unit
D_m	ضریب پخشیدگی مولکولی Molecular diffusion coefficient	1.886×10^{-5}	m^2s^{-1}
g	شتاب ثقل Gravity acceleration	9.80	ms^{-2}
K	هدایت هیدرولیکی Hydraulic conductivity	0.01	ms^{-1}
Q	نرخ تغذیه Discharge rate	6.6×10^{-5}	m^2s^{-1}
ρ_0	چگالی آب شیرین Freshwater density	1000	kgm^{-3}
ρ_s	چگالی آب دریا Seawater density	1025	kgm^{-3}
ϕ	تخلخل porosity	0.35	-



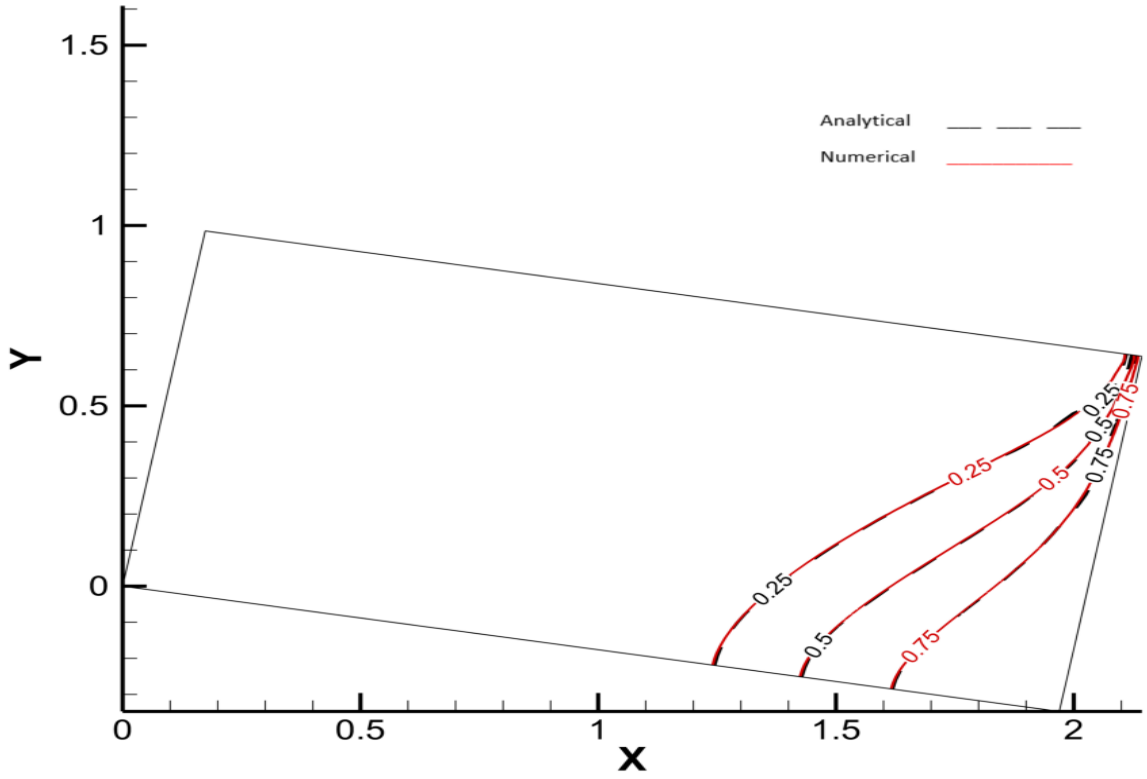
شکل ۴. مقایسه نتایج حل عددی و نیمه تحلیلی مسئله استاندارد هنری (Henry, 1964)، سگل (Segol, 1994) و زیدان (Zidane et al., 2012)

Fig 4. Comparison of numerical and semianalytical results for the standard Henry problem (Henry, 1964), Segol (Segol, 1994), and Zidane et al. (Zidane et al., 2012)



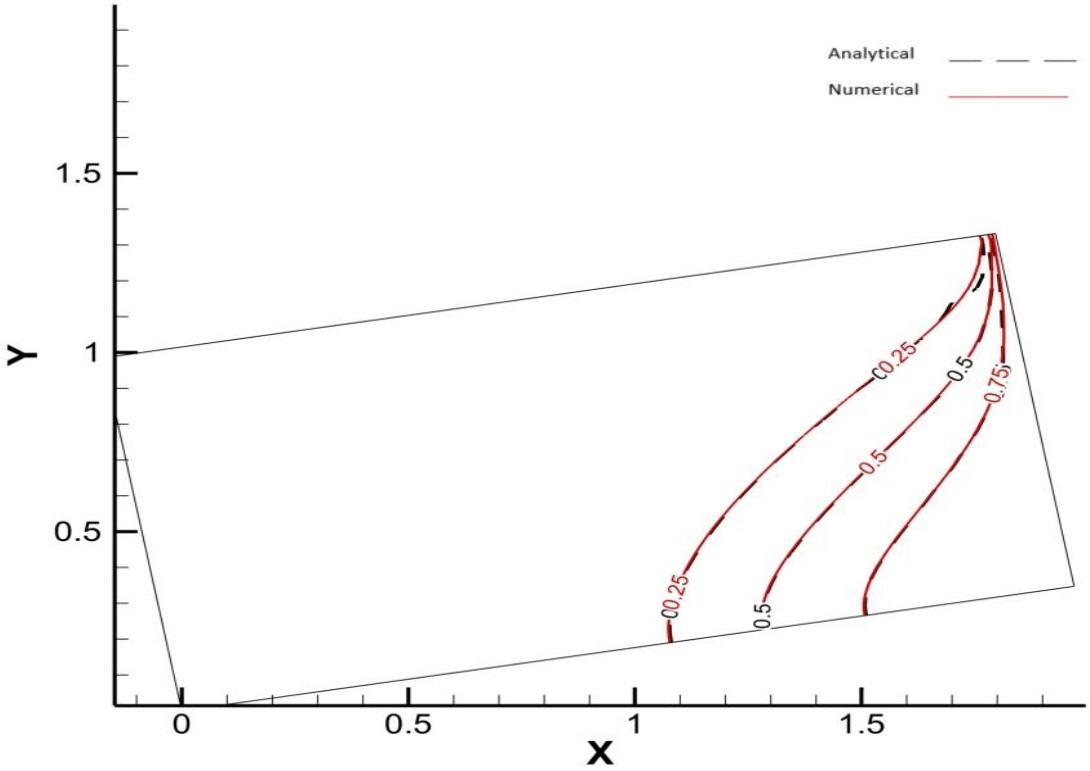
شکل ۵. نتایج حل تحلیلی و عددی مسئله هنری در حالت بدون شیب

Fig 5. Results of semi-analytical and numerical solution of the Henry problem in Horizontal mode



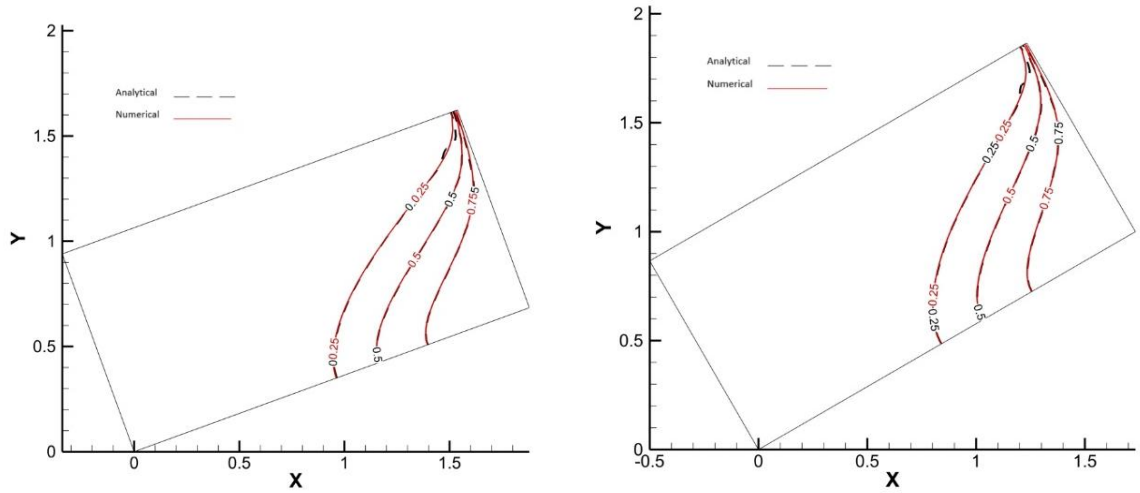
شکل ۶. خطوط هم غلظت برای آبخوان با شیب ۱۰- درجه برای حل نیمه‌تحلیلی و عددی

Fig 6. The semi-analytical and numerical isochlors for the aquifer with a -10 degree slope



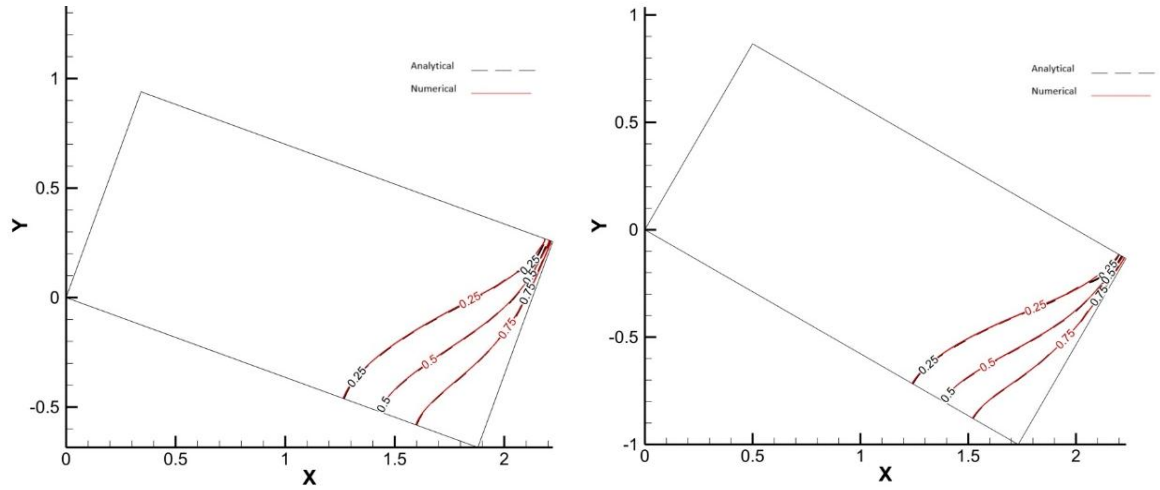
شکل ۷. خطوط هم غلظت برای آبخوان با شیب ۱۰+ درجه برای حل نیمه‌تحلیلی و عددی

Fig 7. The semi-analytical and numerical isochlors for the aquifer with a +10 degree slope



شکل ۸. خطوط هم غلظت حل نیمه‌تحلیلی و عددی برای آبخوان با شیب (الف) ۲۰+ و (ب) ۳۰+ درجه

Fig 8. The semi-analytical and numerical isochlors for the aquifer with (a)+20 degree and (b)+30 degree slope



شکل ۹. خطوط هم غلظت بدست آمده از حل نیمه‌تحلیلی و عددی برای آبخوان با شیب (الف) ۲۰- و (ب) ۳۰- درجه

Fig 9. The semi-analytical and numerical solutions isochlors for the aquifer with (a)-20 degree and (b)-30 degree slope

در ادامه در جدول ۲ موقعیت گوه آب شور (منحنی هم غلظت ۰/۲۵) را برای شیب‌های مختلف ساحل از ۳۰°- (شیب منفی) تا ۳۰°+ (شیب مثبت) نشان می‌دهد. شیب‌های مثبت به‌طور قابل‌توجهی نفوذ آب شور را تشدید می‌کنند و در نتیجه طول گوه بیشتر از حالت افقی می‌شود. شیب‌های منفی به طور مؤثری نفوذ را محدود می‌کنند، به طوری که مثلا در شیب ۳۰- درجه طول گوه شوری ۲۱/۷ درصد نسبت به حالت افقی افزایش نشان می‌دهد.

جدول ۲. تغییرات موقعیت هم غلظت ۰/۱۰ با تغییر شیب آبخوان ساحلی

Table 2. Changes in the position of the 0.10 isochlors due to changes in the coastal aquifer slope

زاویه (درجه) Angle (degree)	موقعیت نوک گوه شوری (متر) Toe position (m)	درصد تغییر طول گوه Variation of the toe length (%)
0	1.17805	0
-10	1.2634	-7.2
-20	1.3492	-14.5
-30	1.4348	-21.7
10	1.0968	6.9
20	1.0258	12.9
30	0.9705	17.6

نتیجه‌گیری

مسئله هنری همچنان نقش مهمی در مطالعات نظری و عملی مرتبط با نفوذ آب شور به سفره‌های آب ساحلی ایفا می‌کند. محبوبیت این مسئله به دلیل سادگی و دقت آن و همچنین وجود راه‌حل‌های نیمه‌تحلیلی است. اولین راه‌حل نیمه‌تحلیلی برای این مسئله با ضریب انتشار یکنواخت و مقدار بالا توسعه داده شده بود. مطالعات بعدی راه‌حل‌های واقع‌گرایانه‌تری با ضریب‌های انتشار کمتر یا پراکندگی وابسته به سرعت ارائه کردند. با این حال، اکثر راه‌حل‌های نیمه‌تحلیلی موجود به دامنه‌های همگن، هم‌روند و هندسه‌های ساده افقی محدود هستند. در این مطالعه، تلاش شد تا با گسترش مسئله هنری به سفره‌های آب ساحلی شیب‌دار واقع‌گرایی این راه‌حل‌ها افزایش یابد. بدین منظور، یک راه‌حل نیمه‌تحلیلی برای مسئله هنری با استفاده از روش فوریه-گالرکین توسعه داده شد. نتایج حاصل از حل نیمه‌تحلیلی با نتایج حاصل از حل عددی مقایسه و ارائه گردید. نتایج نشان داد هر دو روش نیمه‌تحلیلی و عددی، با دقت بالا خطوط غلظت را بازتولید کردند و انطباق بسیار خوبی بین آن‌ها مشاهده شد. نتایج نشان داد در شیب‌های منفی بخشی از جریان آب شیرین در امتداد بستر شیب‌دار به سمت دریا حرکت می‌کند و نیروی مؤثرتری در برابر گوه شور ایجاد می‌کند. این مکانیزم که از طریق تغییر مؤلفه گرانشی در معادلات توصیف می‌شود، باعث فشرده‌شدن گوه شور و کاهش طول نفوذ تا ۲۱/۷ درصد می‌گردد. یافته این پژوهش نشان می‌دهد که هندسه کف آبخوان در درجه اول محل نوک گوه آب شور را کنترل می‌کند و شیب آبخوان تأثیر کمتری بر شکل گوه آب شور در هر دو مدل بر پایه ناحیه گذار و در مدل‌های بر پایه فصل مشترک دارد. همچنین در آبخوان‌های با شیب مثبت (شیب بستر از سمت دریا به‌سوی ساحل)، طول نفوذ آب شور به طور چشمگیری بیشتر از حالت آبخوان افقی است. علت این رفتار آن است که شیب منفی موجب کاهش گرادیان هیدرولیکی مؤثر جریان آب شیرین در جهت دریا شده و بنابراین توان هیدرودینامیکی آب شیرین برای مقابله با پیشروی گوه آب شور کاهش می‌یابد. علاوه بر این، افزایش ارتفاع نسبی بستر، عمق مؤثر جریان و ضخامت هیدرولیکی لایه آب شیرین را در ناحیه ساحلی کاهش می‌دهد که این پدیده مقاومت بیشتری در مسیر جریان ایجاد کرده و سرعت جریان آب شیرین را پایین می‌آورد. از سوی دیگر، چنین هندسه‌ای فشار هیدرواستاتیک مؤثر آب شور را در ناحیه نوک گوه افزایش داده و تعادل نیروهای رانشی را به نفع آب شور تغییر می‌دهد. مجموع این عوامل نهایتاً منجر به گسترش بیشتر گوه آب شور و افزایش طول نفوذ آن در آبخوان شیب‌دار می‌شود.

درنظرگرفتن شیب در آبخوان ساحلی اهمیت بسیار زیادی در ارزیابی آسیب‌پذیری آبخوان‌های ساحلی در برابر افزایش سطح آب دریا دارد. نتایج حاضر نشان می‌دهند که حتی بدون در نظرگرفتن افزایش سطح آب دریا، شیب معکوس ۳۰- درجه‌ای باعث افزایش ۲۲٪ نفوذ آب شور می‌شود، بنابراین این آبخوان‌ها در سناریوهای آینده افزایش سطح دریا آسیب‌پذیری بسیار بیشتری خواهند داشت. در مقابل، آبخوان‌های با شیب منفی (مانند بسیاری از جزایر مرجانی و دلتاها) دارای مقاومت طبیعی قابل‌توجهی هستند و مدل‌های پیش‌بینی که فقط حالت افقی را در نظر می‌گیرند، میزان نفوذ را بیش از واقعیت برآورد می‌کنند. این مطالعه همچنین نشان داد که روش حل نیمه‌تحلیلی برای سناریوهای دوبعدی ماندگار در آبخوان‌های ساحلی شیب‌دار، ابزاری کارآمد و کم‌هزینه است. از نتایج این مدل می‌توان در مدیریت منابع آب ساحلی، مانند پیش‌بینی اثرات پمپاژ بیش از حد یا تغییرات اقلیمی بر نفوذ آب دریا و اثرات آن مانند افزایش سطح آب دریا استفاده کرد. مقایسه نتایج حاصل از حل نیمه‌تحلیلی مسئله هنری با نتایج حل عددی مدل

کامسول که بر پایه روش اجزاء محدود است، تطابق بسیار خوبی را نشان داد. هدف اصلی این مطالعه، پیش‌بینی تغییرات طول گوه نفوذ آب شور دریا در آبخوان ساحلی شیب‌دار می‌باشد. نتایج حاصل از حل نیمه‌تحلیلی و عددی عملکرد و کارایی مناسبی در تعیین موقعیت این نقطه داشت. نتایج حل نیمه‌تحلیلی مسئله هنری برای هندسه‌های مختلف آبخوان ساحلی نشان داد این روش با مزایای محاسباتی و بینش تحلیلی، مکمل مناسبی برای ابزارهای عددی پیچیده است و می‌تواند در مطالعات سریع و پارامتریک مورد استفاده قرار گیرد.

منابع

Akylas, E., Koussis, A. D., & Yyanacopoulos, A. N. (2006). Analytical solution of transient flow in a sloping soil layer with recharge. *Hydrological Sciences Journal*, 51(4), 626–641. https://doi.org/10.1623/hysj.51.4.626

Al-Taliby, W., & Pandit, A. (2017). Comparison of solutions of coupled and uncoupled models for the Henry problem. *World Environmental and Water Resources Congress 2017*, Sacramento, California. https://doi.org/10.1061/9780784480618.016

Amin, F., & Malek, A. (2017). Spectral Fourier–Galerkin benchmark solution for natural convection in an inclined saturated porous medium. *Numerical Heat Transfer*, Part B: Fundamentals, 71(4), 372–395. https://doi.org/10.1080/10407790.2016.1265300

Ataie-Ashtiani, B., & Aghayi, M. M. (2006). A note on benchmarking of numerical models for density-dependent flow in porous media. *Advances in Water Resources*, 29(12), 1918–1923. https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2006.01.009

Ataie-Ashtiani, B., Werner, A. D., Simmons, C. T., Morgan, L. K., & Lu, C. (2013). How important is the impact of land-surface inundation on seawater intrusion caused by sea-level rise?. *Hydrogeology Journal*, 21(7), 1673–1677. https://doi.org/10.1007/s10040-013-1021-0

Baazm, Z., Akbarpour, A., Yaghoubzadeh, M., Eslamian, S.S., & Khozeymehnezhad, H. (2025). Investigation of the effect of cutoff wall on controlling seawater intrusion and reducing nitrate contamination in coastal aquifers using the meshless local Petrov–Galerkin (mlpg) numerical model. *Journal of Aquifer and Qanat*, 6 (2), 175-198. https://doi.org/jaaq.2025.10092.1126.

Basha, H. A., & Maalouf, S. F. (2005). Theoretical and conceptual models of subsurface hillslope flows. *Water Resources Research*, 41(7), W07024. https:// doi.org/10.1029/2004WR003769

Bear, J. (1979). *Hydraulics of Groundwater*. McGraw-Hill International Book Company.

Bear, J., Cheng, A. H.-D., Sorek, S., Ouazar, D., & Herrera, I. (1999*). Seawater Intrusion in Coastal Aquifers: Concepts, Methods and Practices*. Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2969-7

Carlston, C. W. (1963). An early American statement of the Badon-Ghyben-Herzberg principle of static fresh-water-salt-water balance. *American Journal of Science*, 261(1), 88–91. https:// doi.org/10.2475/ajs.261.1.88

Cooper, H. H. (1959). A hypothesis concerning the dynamic balance of fresh water and salt water in a coastal aquifer. *Journal of Geophysical Research*, 64(4), 461–467. https://doi.org/10.1029/JZ064i004p00461

Cooper, H. H., Kohout, F. A., Henry, H. R., & Glover, R. E. (1964). Sea Water in Coastal Aquifers: Relation of Salt Water to Fresh Ground Water. USGS Water-Supply Paper 1613-C. https://doi.org/10.3133/wsp1613C

Croucher, A. E., & O'Sullivan, M. J. (1995). The Henry problem for saltwater intrusion. *Water Resources Research*, 31(7), 1809–1814. https://doi.org/10.1029/95WR00431

Dentz, M., Tartakovsky, D. M., Abarca, E., Guadagnini, A., Sanchez-Vila, X., & Carrera, J. (2006). Variable-density flow in porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, 561, 209–235. https://doi.org/10.1017/S0022112006000668

Davis, S. N. (1978). Flotation of fresh water on sea water: A historical note. *Ground Water*, 16(6), 444–445. https://doi.org/10.1111/j.1745-6584.1978.tb03260.x

Drabbe, J., & Badon Ghijben, W. (1889). Nota in verband met de voorgenomen putboring nabij Amsterdam. *Tijdschrift van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs*, 8–22. https:// doi.org/10.1007/s10040-018-1797-z

Fahs, M., Ataie-Ashtiani, B., Younes, A., Simmons, C. T., & Ackerer, P. (2016). The Henry problem: New semianalytical solution for velocity-dependent dispersion. *Water Resources Research*, 52(9), 7382–7407. https://doi.org/10.1002/2016WR019288

Fahs, M., Koohbor, B., Belfort, B., Ataie-Ashtiani, B., Simmons, C. T., Younes, A., & Ackerer, P. (2018). A generalized semi-analytical solution for the dispersive Henry problem: Effect of stratification and anisotropy on seawater intrusion. *Water*, 10(2), 159. https://doi.org/10.3390/w10020230

Fahs, M., Younes, A., & Mara, T. A. (2014). A new benchmark semi-analytical solution for density-driven flow in porous media. *Advances in Water*

Resources, 70, 24–35. https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2014.04.013
Ferguson, G., & Gleeson, T. (2012). Vulnerability of coastal aquifers to groundwater use and climate change. *Nature Climate Change*, 2(5), 342–345. https://doi.org/10.1038/nclimate1413
Glover, R. E. (1959). The pattern of fresh-water flow in a coastal aquifer. *Journal of Geophysical Research*, 64(4), 457–459. https://doi.org/10.1029/JZ064i004p00457
Henderson, F. M., & Wooding, R. A. (1964). Overland flow and groundwater flow from a steady rainfall of finite duration. *Journal of Geophysical Research*, 69(8), 1531–1540. https://doi.org/10.1029/JZ069i008p01531
Henry, H. R. (1959). Salt intrusion into freshwater aquifers. *Journal of Geophysical Research*, 64(11), 1911–1919. https://doi.org/10.1029/JZ064i011p01911
Henry, H. R. (1964). Effects of Dispersion on Salt Encroachment in Coastal Aquifers. *USGS Water-Supply Paper* 1613-C. https://doi.org/10.3133/wsp1613C
Huang, C.-S., Yang, S.-Y., & Yeh, H.-D. (2014). Groundwater flows to a pumping well in a sloping fault zone unconfined aquifer. *Water Resources Research*, 50(5), 4079–4094. https://doi.org/10.1002/2013WR014212
Hubbert, M. K. (1940). The theory of groundwater motion. *The Journal of Geology*, 48(8, Part 1), 785–944. https://doi.org/10.1086/624930
Hubbert, M. K. (1953). Entrapment of petroleum under hydrodynamic conditions. *AAPG Bulletin*, 37(8), 1954–2026. https://doi.org/10.1086/624930
Huyakorn, P. S., Andersen, P. F., Mercer, J. W., & White, H. O. (1987). Saltwater intrusion in aquifers: Development and testing of a three-dimensional finite element model. *Water Resources Research*, 23(2), 293–312. https://doi.org/10.1029/WR023i002p00293
Jamshidzadeh, Z., Tsai, F. T. C., Mirbagheri, S. A., & Ghasemzadeh, H. (2013). Fluid dispersion effects on density-driven thermohaline flow and transport in porous media. *Advances in Water Resources*, 61, 12–28. https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2013.08.006
Karimi, M., Yazdi, M., & Zad, A. A. (2022). Investigating soil consolidation via the vacuum method by using numerical analysis. *Amirkabir Journal of Civil Engineering*, 54(7), 2739–2758. https://doi.org/10.22060/ceej.2022.18264.6812
Karimzadeh, E., Akbarpour, A. & Mohtashami, A. (2024). Simulation of seawater infiltration in coastal aquifer using MLPG numerical method. *Journal of Aquifer and Qanat*, 5 (1), 19-44. https://doi.org/10.22077/jaaq.2024.8115.1076
Koussis, A. D., Georgopoulou, E., Kotronarou, A., Lalas, D. P., Restrepo, P., Destouni, G., ... & Gomez-Gotor, A. (2010). Cost-efficient management of coastal aquifers via recharge with treated wastewater and desalination of brackish groundwater: general framework. *Hydrological Sciences Journal*, 55(7), 1217–1233. https://doi.org/10.1080/02626667.2010.512467
Koussis, A. D., Mazi, K., & Destouni, G. (2012). Analytical single-potential, sharp-interface solutions for regional seawater intrusion in sloping unconfined coastal aquifers, with pumping and recharge. *Journal of Hydrology*, 416–417, 1–11. https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2011.11.012
Lee, C. H., & Cheng, R. T. S. (1974). On seawater encroachment in coastal aquifers. *Water Resources Research*, 10(5), 1039–1043. https://doi.org/10.1029/WR010i005p01039
Lu, C., Xin, P., Kong, J., Li, L., & Luo, J. (2016). Analytical solutions of seawater intrusion in sloping confined and unconfined coastal aquifers. *Water Resources Research*, 52(9), 6989–7004. https://doi.org/10.1002/2016WR019101
Maas, K. (2007). Influence of climate change on a Ghijben–Herzberg lens. *Journal of Hydrology*, 347(1-2), 223–228. https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2007.09.020
Mahdizadeh Mahali, S. S., & Vafaei, F. (2018). Evaluation of the sharp interface approach simulation in predicting salinity intrusion in layered coastal aquifers under pumping conditions. *Journal of Environmental Science and Technology*, 20(4), 29–49. https://doi.org/10.22034/jest.2019.13700
Mahmoudian Shoushtari, M. (2010). *Groundwater Hydraulics*. Shahid Chamran University Press.
Mazi, K., Koussis, A., & Destouni, G. (2013). Tipping points for seawater intrusion in coastal aquifers under rising sea level. *Environmental Research Letters*, 8(1), 014001. https://doi.org/ 10.1088/1748-9326/8/1/014001
McEnroe, B. M. (1993). Maximum saturated depth over landfill liner. *Journal of Environmental Engineering*, 119(2), 262–270. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9372(1993)119:2(26)
Melloul, A. J., & Zeitoun, D. G. (1999). A semi-empirical approach to intrusion monitoring in the Israeli coastal aquifer. In Seawater Intrusion in Coastal Aquifers (pp. 543–558). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2969-7_16
Nohani, E., Babaali, B. & Dehghani, R. (2025). Analysis of Groundwater Salinity in the Caspian Sea Coasts
Using Meta-Heuristic Algorithms. *Journal of Aquifer and Qanat*, 6 (2), 25-40. http://doi.org/10.22077/jaaq.2025.10220.113
Post, V. E. A., Bosserelle, A. L., Galvis, S. C., Sinclair, P. J., & Werner, A. D. (2018). On the resilience of small-island freshwater lenses: Evidence of the long-term impacts of groundwater abstraction on Bonriki Island, Kiribati. *Journal of*

Hydrology, 564, 133–148. https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2018.06.015

Raeisi Isa-Abadi, A., Fontaine, V., Ghafouri, H. R., Younes, A., & Fahs, M. (2020). A fully interior penalty discontinuous Galerkin method for variable density groundwater flow problems. *Computers & Fluids*, 213, 104740. https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2020.104744

Raeisi Esbadi, A. (2016). *Modeling of seawater intrusion in heterogeneous coastal aquifers using the discontinuous Galerkin method* [Doctoral dissertation, Shahid Chamran University of Ahvaz].

Segol, G., Pinder, G. F., & Gray, W. G. (1975). A Galerkin-finite element technique for calculating the transient position of the saltwater front. *Water Resources Research*, 11(2), 343–347. https://doi.org/10.1029/WR011i002p00343

Sherif, M., & Singh, V. P. (1999). Effect of climate change on seawater intrusion in coastal aquifers. *Hydrological Processes*, 13(8), 1277–1287. https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1085(19990615)13:8<1277::AID-HYP765>3.0.CO;2-W

Simpson, M. J., & Clement, T. P. (2004). Improving the worthiness of the Henry problem as a benchmark for density-dependent groundwater flow models. *Water Resources Research*, 40(1), W01504. https://doi.org/10.1029/2003WR002199

Verhoest, N. E. C., & Troch, P. A. (2000). Some analytical solutions of the linearized Boussinesq equation with recharge for a sloping aquifer. *Water Resources Research*, 36(3), 793–800. https://doi.org/10.1029/2000WR900081

Verruijt, A. (1968). A note on the Ghyben-Herzberg formula. *Bulletin of the International Association of Scientific Hydrology*, 13(4), 43–46. https://doi.org/10.1080/02626666809493624

Weatherill, D., Simmons, C. T., Voss, C. I., & Robinson, N. I. (2004). Testing density-dependent groundwater models: Two-dimensional steady state unstable convection in infinite, finite, and inclined porous layers. *Advances in Water Resources*, 27(5), 547–562. https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2004.01.003

Wentworth, C. K. (1948). Growth of the Ghyben-Herzberg transition zone under a rinsing hypothesis. Transactions, *American Geophysical Union*, 29(1), 97–98. https://doi.org/10.1029/TR029i001p00097

White, I., Falkland, T., Perez, P., Dray, A., Metutera, T., Metai, E., & Overmars, M. (2007). Challenges in freshwater management in low coral atolls. *Journal of Cleaner Production*, 15(16), 1522–1528. https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2006.07.051

Younes, A., & Fahs, M. (2013). A semi-analytical solution for the reactive Henry saltwater intrusion problem. *Water, Air, & Soil Pollution*, 224(11), 1731. https://doi.org/10.1007/s11270-013-1779-7

Younes, A., & Fahs, M. (2014). A semi-analytical solution for saltwater intrusion with a very narrow transition zone. *Hydrogeology Journal*, 22(2), 501–506. https://doi.org/10.1007/s10040-014-1102-8

Younes, A., & Fahs, M. (2015). Extension of the Henry semi-analytical solution for saltwater intrusion in stratified domains. *Computational Geosciences*, 19(6), 1207–1217. https://doi.org/10.1007/s10596-015-9534-3

Younes, A., Fahs, M., & Ahmed, S. (2009). Solving density-driven flow problems with efficient spatial discretizations and higher-order time integration methods. *Advances in Water Resources*, 32(3), 340–352. https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2008.11.003

Zidane, A., Younes, A., Huggenberger, P., & Zechner, E. (2012). The Henry semianalytical solution for saltwater intrusion with reduced dispersion. *Water Resources Research*, 48(6), W06533. https://doi.org/10.1029/2011WR011157