Original Article

Journal of
Aquifer and Qanat

Spring And Summer 2024, Vol. 5, No. 1, pp 19-44

10.22077/jaaq.2024.8115.1076

Simulation of Sea Water Infiltration in Coastal Aquifer Using MLPG Numerical Method

Elham Karimzadeh[1] | **Abolfazl Akbarpour**[2✉] | **Ali Mohtashami**[3]

1. Master's student in Civil Engineering, Water Resources Management, University of Birjand, Iran.
2. Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran.
3. Assistant Professor of UNESCO Chair on Aflaj Studies (Archaeohydrology), University of Nizwa, Nizwa, Oman.

✉Corresponding Author: Akbarpour@birjand.ac.ir

Received:
05 September 2024

Accepted:
24 November 2024

Published:
20 December 2024

Keywords:

Saline Water Intrusion,
Flow and Transport Equations,
local Petrov- Galerkin Method,
FEFLOW Model.

Extended abstract

Introduction

Groundwater contamination, especially through saltwater intrusion into freshwater aquifers, is a significant environmental issue affecting coastal regions worldwide. This phenomenon threatens freshwater supplies, which are crucial for drinking water, agriculture, and industry. Saltwater intrusion is particularly concerning in areas where aquifers are the primary source of water, such as many coastal cities and agricultural regions. To understand and mitigate the effects of saltwater intrusion, numerical and analytical models have become essential tools for simulating and predicting the behavior of this process. These models help scientists and engineers make informed decisions about water management and develop strategies to protect and conserve freshwater resources. One of the widely studied conceptual models for this phenomenon is Henry's problem, a simplified representation of saltwater intrusion in coastal aquifers. Henry's problem has become a benchmark for testing and validating computational methods, offering a straightforward but effective means of studying the dynamics of saltwater intrusion under controlled conditions. This study aims to compare two advanced numerical methods: the local Petrov-Galerkin (MLPG) meshless method and the finite element model FEFLOW, by applying them to the Henry problem.

Cite this article: Karimzadeh, E., Akbarpour, A. & Mohtashami, A. (2024). Simulation of sea water infiltration in coastal aquifer using MLPG numerical method. *Journal of Aquifer and Qanat Title*, 5 (1), 19-44. DOI: http//doi.org/10.22077/jaaq.2024.8115.1076

Through this comparison, the study assesses the accuracy and effectiveness of both methods in simulating saltwater intrusion dynamics and provides insights into their practical applications for groundwater contamination studies.

Material and Method

The Henry problem models a vertical cross-section of a homogeneous aquifer that is bounded by impermeable layers. Freshwater enters the aquifer at one boundary with zero salinity, and saline water enters from the opposite boundary. The simulation assumes a porosity of 0.35 for the aquifer material and a molecular diffusion coefficient of 6.6×10^{-6} in SI system, with no longitudinal or transverse dispersity. The problem is governed by the interaction between the hydraulic head and the salinity concentration, with boundary conditions defined according to Neumann and Dirichlet principles for the hydraulic head and concentration, respectively. The initial salinity condition within the aquifer is assumed to be zero, indicating no contamination at the start of the simulation.

To solve this problem numerically, the computational domain was discretized into a grid with 200 cells and 231 nodes, ensuring sufficient resolution to accurately capture the concentration gradients and fluid flow patterns within the aquifer. This discretization is critical for modeling the complex interactions between freshwater and saline water in the aquifer, as well as for resolving the steep concentration gradients near the boundaries of the saltwater intrusion zone.

In terms of numerical methods, two advanced approaches were employed. The first method is the local Petrov-Galerkin (MLPG) meshless method, which is particularly advantageous in scenarios where high precision is required near boundaries. This method eliminates the need for predefined connectivity between nodes, offering greater flexibility and accuracy in capturing the behavior of complex phenomena such as saltwater intrusion. The second method is the finite element model FEFLOW, a widely used and robust tool for solving groundwater flow and transport problems, particularly for complex geometries and variably saturated flows. FEFLOW serves as a benchmark in this study, allowing for a direct comparison between a traditional finite element approach and a more modern meshless method.

Result and Discussion

The results of the simulations indicate that both methods—MLPG and FEFLOW—generated comparable concentration contours, with saltwater intrusion extending approximately halfway into the aquifer. Both methods showed similar patterns of saltwater dispersion, with a progressive decrease in salinity concentration as the distance from the saline boundary increased. The concentration contours were evenly spaced, which suggests that the dispersion process was uniform, particularly in the central regions of the aquifer. However, MLPG demonstrated superior accuracy in capturing concentration gradients near the impermeable upper boundary, owing to its meshless nature, which allows for finer resolution in regions where traditional mesh-based methods may struggle.

In addition to concentration contours, the flow velocity vectors derived from the MLPG method revealed significant vertical movement near the saline boundary. These vertical flow paths are driven by hydraulic gradients that oppose gravity, directing the flow upward towards the surface. In contrast, areas farther from the saline boundary exhibited predominantly horizontal flow patterns, as expected in regions where salinity has a minimal effect on flow dynamics. This observation confirms the expected behavior of groundwater flow in coastal aquifers under saltwater intrusion conditions, where the direction of flow is heavily influenced by the concentration gradients and the relative density of the freshwater and saline water.

A sensitivity analysis was also conducted to assess the influence of key aquifer properties on the extent and shape of the saltwater intrusion. The results indicated that hydraulic conductivity was the most significant parameter affecting the intrusion pattern. Variations in hydraulic conductivity had a marked effect on the predicted extent of saltwater intrusion, with higher conductivity leading to greater penetration of saltwater into the aquifer. Other parameters, such as porosity and boundary discretization, also affected the results, but to a lesser degree. This finding underscores the importance of accurate parameter estimation in groundwater modeling, as even small changes in hydraulic conductivity can significantly impact the accuracy of predictions related to saltwater intrusion.

Conclusion

This comparative study demonstrates the effectiveness of the MLPG and FEFLOW methods in simulating saltwater intrusion and modeling groundwater contamination. Both methods provided reliable and consistent results, validating their applicability in groundwater studies. The MLPG method proved to be particularly advantageous in capturing high-precision concentration gradients near boundaries, making it a valuable tool in situations where boundary resolution is critical. On the other hand, FEFLOW remains a robust and reliable model for solving groundwater flow and transport problems in more general applications, particularly in complex geometries. The sensitivity analysis highlighted the critical role of accurate parameter estimation, particularly hydraulic conductivity, in the predictive modeling of saltwater intrusion. This study not only underscores the value of advanced numerical methods like MLPG and FEFLOW for groundwater contamination problems but also points to the need for further research to explore three-dimensional geometries and incorporate anisotropic aquifer properties. These future extensions could enhance the predictive capabilities of these models and provide more accurate simulations for real-world groundwater systems, ultimately helping to improve water management strategies and mitigate the impacts of saltwater intrusion in coastal areas.

مقاله پژوهشی

مجله
آبخوان و قنات

دوره پنجم، شماره اول، بهار و تابستان ۱۴۰۳، صفحات ۴۴-۱۹

10.22077/jaaq.2024.8115.1076

شبیه‌سازی نفوذ آب دریا در آبخوان ساحلی به کمک روش عددی MLPG

الهام کریم‌زاده [۱] | ابوالفضل اکبرپور [۲]✉ | علی محتشمی [۳]

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران-مدیریت منابع آب، دانشکده مهندسی، دانشگاه بیرجند، ایران.

۲. استاد، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه بیرجند، ایران.

۳. استادیار کرسی یونسکو در مطالعات افلج (باستان‌شناسی)، دانشگاه نیزوا، نیزوا، عمان.

✉نویسنده مسئول: Akbarpour@birjand.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۶/۱۵
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۹/۰۴
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۰۹/۳۰

چکیده

آبخوان‌های ساحلی، سفره‌های آب زیرزمینی هستند که در کنار دریا قرار گرفته‌اند. همواره کیفیت آب این آبخوان‌ها مورد توجه بوده و یکی از اصلی‌ترین نگرانی‌ها در این مورد نفوذ آب‌شور دریا به آبخوان می‌باشد. میزان اثرپذیری آب سفره، به جریان آب زیرزمینی و هم‌چنین غلظت ماده آلاینده نمک بستگی دارد؛ از طرفی میزان شوری وارده نیز به عواملی چون فعالیت‌های کشاورزی و انسانی، تغییرات اقلیمی و غیره وابسته است. امروزه با عنایت به کمبود منابع آب، استفاده از منابع آب زیرزمینی افزایش یافته است، لذا بررسی پدیده نفوذ آب‌شور امری ضروری تلقی می‌شود که در این مطالعه به بررسی آن پرداخته می‌شود. دو روش بدون شبکه پترووـگالرکین محلی (MLPG) و روش اجزا محدود FEFLOW برای شبیه‌سازی این پدیده به‌کار گرفته شد. نتایج حاصل از روش MLPG نشان داد که منحنی‌های هم‌غلظت و بردارهای سرعت به‌خوبی نحوه توزیع غلظت و مسیر جریان را در آبخوان نشان می‌دهند. غلظت نسبی آب‌شور با افزایش فاصله از مرز آلاینده کاهش می‌یابد. نتایج مدل‌سازی به روش FEFLOW نیز منحنی‌های مشابهی از هم‌غلظت‌ها ارائه کرد که تطابق مناسبی با نتایج MLPG دارد. همچنین، تحلیل حساسیت شبکه‌بندی نشان داد که با تغییر فاصله‌بندی از ۰/۱ به ۰/۲، میزان تغییرات غلظت در گره‌ها ناچیز است. به‌طور کلی، نتایج نشان داد که هر دو روش MLPG و FEFLOW توانایی بالایی در مدل‌سازی دقیق مسئله هنری دارند و اختلاف قابل‌توجهی در نتایج نهایی مشاهده نشد.

کلیدواژه‌ها:
نفوذ آب‌شور،
معادلات جریان و انتقال،
روش پترووـگالرکین محلی،
مدل FEFLOW.

مقدمه

بخش عظیمی از آب شیرین جهان توسط سفره‌های آب زیرزمینی تأمین می‌گردد. طول عمر این سفره‌ها بین ۱۰ تا ۱۰۰۰ سال متغیر می‌باشد. به‌طور کلی عواملی چون افزایش خشک‌سالی، استخراج بیش از حد آب زیرزمینی و هم‌چنین کاهش بارندگی بر سطح آب زیرزمینی اثر گذاشته و موجب افت آن می‌گردد (Mohtashmi, 2015). در آبخوان‌های ساحلی که بخشی از منابع آب زیرزمینی می‌باشند خطر پدیده نفوذ آب دریا وجود دارد، با کاهش سطح آب کیفیت سفره سریع‌تر به حد نامطلوب می‌رسد (Nick et al., 2013). بنابراین، با ارائه پیشنهاداتی می‌توان خسارات حاصل از این پدیده را کاهش داد. از مباحث مهم در آبخوان‌های ساحلی نفوذ آلاینده‌ها به داخل آبخوان می‌باشد که یکی از این آلاینده‌ها آب‌شور دریا است. استخراج بیش از حد آب زیرزمینی می‌تواند منجر به کمبود آب شیرین و نفوذ آب‌شور به آبخوان گردد (Walther et al., 2012). در لحظه تداخل، آب شیرین به‌علت چگالی کم‌تر نسبت به آب‌شور در بالای آن قرار می‌گیرد (Jamshidzadeh, 2012). در ارتباط با بحث تداخل آب‌شور و آب شیرین باید معادلات انتقال و جریان حل شوند تا مدل‌سازی صورت گیرد. حل معادلات انتقال در خصوص تعیین غلظت شوری و حل معادلات جریان در خصوص تعیین هد و سرعت آب می‌باشد تا در نهایت ارتباط بین غلظت با افزایش و کاهش سطح آب نیز مورد بررسی قرار گیرد (Singth, 2014). برای حل این معادلات روش‌های عددی، تحلیلی و آزمایشگاهی متعددی وجود دارند که به‌علت زمان‌بر بودن روش آزمایشگاهی و هم‌چنین عدم توانایی حل تحلیلی تحت شرایط مرزی پیچیده، روش عددی نسبت به سایر روش‌ها برتری دارد (Bazari, 2017). اکبرپور و همکاران با استفاده از الگوریتم گام تصادفی و مدل عددی اجزا محدود، حریم کمی چاه‌های یک آبخوان استاندارد و آبخوان آزاد بیرجند را تعیین و ترسیم نمودند و نتایج نشان داد که کشیدگی حریم به سمت مناطقی با سطح آب زیرزمینی بالاتر و قابلیت انتقال بیشتر است (Akbarpour et al., 2020). یاسی و همکاران با استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین و معادله جابه‌جایی-پراکندگی کسری، مدلی جامع برای انتقال آلودگی در رودخانه‌ها ارائه دادند که نتایج نشان داد به‌طور متوسط ۱۱ درصد دقیق‌تر از مدل مایک ۲۱ است (Yasi et al., 2022).

از مزیت‌های روش عددی می‌توان به صرفه اقتصادی آن‌ها و از همه مهم‌تر قابلیت حل مسئله حتی تحت شرایط پیچیده اشاره نمود. اساس کار روش‌های عددی استفاده از معادلات دیفرانسیلی است که وابسته به نوع مسئله به‌صورت خطی یا غیرخطی حل می‌شوند (Arzani, 2016). به‌طور کلی روش‌های عددی بر دو دسته شبکه‌بندی شده مانند FEM، BEM، FDM و غیره و بدون شبکه MLPG، PCM و غیره تقسیم‌بندی می‌شوند که وابسته به نوع و شرایط مسئله به‌کار گرفته می‌شوند (Akbarpour et al., 2018). روش‌های بدون شبکه به‌علت عدم استفاده از شبکه و اجزا از سهولت و مزیت بیشتری برخوردار هستند (Arzani, 2016).

هابرت حل عددی نفوذ دائمی آب‌شور در آبخوان‌های ساحلی را بر پایه فرضیه فصل مشترک ارائه داد، اگرچه در عمل فصل مشترک تیغه‌ای و آب‌شور با آب شیرین طی فرایند پخش مکانیکی به‌طور تدریجی ادغام می‌گردد. پهنای ناحیه انتشار به خصوصیات آبخوان و جابجایی آب به‌علت جزرومد و نوسانات تغذیه وابسته است (Hubbert, 1940). روش فصل مشترک نیز برای شبیه‌سازی و تهیه مدل دوبعدی و سه بعدی مسئله مذکور به‌کار گرفته می‌شود که فرآیند در مدل‌های عددی برای شبیه‌سازی مسئله نفوذ آب‌شور از روش فصل مشترک استفاده نمود. تعدادی از این مدل‌ها نشان دادند که نفوذ آب‌شور به غلظت سیال وابسته می‌باشد (Frind, 1982). یوکیون و همکارانش مدل عددی سه بعدی را برای شبیه‌سازی نفوذ آب دریا توسعه دادند. آن‌ها توزیع

فصل مشترک را بین آب دریا و آب شیرین و هم‌چنین سیر تکاملی ناحیه انتقال را مطالعه کردند. در پایان میزان نفوذ آب دریا را به‌علت پمپاژ آب زیرزمینی تخمین زدند (Yuqun et al., 1998). اسبای و همکاران نیز مدل اجزا محدود را برای پیش‌بینی نفوذ آب‌شور تحت شرایط دائم و پایدار بر مبنای فرضیه فصل مشترک توسعه دادند و نتایج را با مقادیر آزمایشگاهی و تحلیلی مقایسه نمودند (Sbai et al., 1998). در این میان برخی از محققین به محدودیت‌های روش فصل مشترک پی بردند برای نمونه ساکر مدل دوبعدی اجزا محدود را برای شبیه‌سازی انتقال محلول برحسب غلظت ارائه دادند و محدودیت‌های روش فصل مشترک را در آبخوان ساحلی تحت شرایط دائمی و غیردائمی بررسی نمود (Saker, 1999). در رابطه با بحث تداخل مطالعات متعدد دیگری صورت گرفته که به شرح زیر است:

شریف و همکاران مدل عددی دوبعدی اجزا محدود را برای شبیه‌سازی نفوذ آب‌شور در آبخوان محصور تحت شرایط دائم ارائه دادند. مدل برای شبیه‌سازی نفوذ آب دریا در آبخوان وسیع به‌کار گرفته شد و نتایج نشان داد که ایزوکلر ۳۵ از فاصله ۶۵ کیلومتری مرز دریا در پایین آبخوان نفوذ می‌کند (Sherif et al., 1988).

یاسی و همکاران با استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین، مدل‌سازی عددی انتقال آلاینده در رودخانه مری‌برن را انجام دادند و نتایج نشان‌دهنده دقت و کارایی بالای این روش نسبت به روش‌هایی مانند تفاضل محدود و اجزای محدود بود (Yasi et al., 2021).

بژیو و همکاران مدل اجزا محدود انتقال محلول و جریان را برای پیش‌بینی محدوده نفوذ آب دریا در مقطع عمودی برای جریان پایدار توسعه دادند. مطالعه ثابت کرد که آبخوان با نفوذ آب دریا در مجاورت با تالاب تهدید می‌شود (Bixio et al., 1998).

راستگویی و همکاران روش عددی را برای مطالعه نفوذ دائمی آب‌شور که شامل پخش هیدرو دینامیکی در آبخوان‌های ساحلی است گسترش دادند. مدل استفاده شد تا با بهره‌وری اقدامات کنترل آب دریا شامل تغذیه چاه و سیستم ترکیبی برداشت آب‌شور و تغذیه آب شیرین مورد بررسی قرار دهد (Rastgoi et al., 2004).

به‌منظور صحت‌سنجی روش‌ها و نتایج حاکی از آن‌ها می‌توان از مسئله استاندارد هنری که نفوذ آب‌شور را مطرح می‌کند استفاده نمود. لیو و همکارانش مدل دوبعدی حجم محدود را برای مدل‌سازی نفوذ شوری در آبخوان‌های ساحلی ارائه دادند. در این مطالعه جریان پایدار و غلظت متغیر درنظر گرفته شد و در انتها به اعتبارسنجی مدل با مسئله هنری تحت شرایط دائم و ماندگار پرداختند (Liu et al., 2001).

در مطالعه حاضر، ابتدا از روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین برای گسسته‌سازی معادلات استفاده شده تا مسئله استاندارد هنری را حل و مدل‌سازی کند و اعتبارسنجی نیز صورت گیرد (Croicher et al., 1995). از مدل اجزا محدود FEFLOW نیز برای شبیه‌سازی آلودگی وارده استفاده شد تا در انتها بتوان نتایج حاصل از روش بدون شبکه را با اجزا محدود (FEM) مقایسه نمود. هدف اصلی این مطالعه بررسی پدیده تداخل آب‌شور و شیرین در آبخوان ساحلی با محیطی همگن و همسان است، که در این رابطه بررسی پارامترهایی از قبیل سرعت، هد جریان و هم‌چنین غلظت ناشی از ورود ماده آلاینده مهم می‌باشد؛ به این منظور معادلات جریان و انتقال محلول به‌کار می‌روند. برای گسسته‌سازی این معادلات به‌کمک توابع شکل حداقل مربعات متحرک (MLS) و وزن کیوبیک اسپیلاین از روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین استفاده می‌شود و تغییرات شوری و اثر افزایش و کاهش سطح آب زیرزمینی بر آن بررسی می‌شود. در پایان نتایج با مدل اجزا محدود FEFLOW مقایسه می‌شوند.

نوآوری این مطالعه مدل سازی پدیده تداخل آب‌شور و آب شیرین به روش بدون شبکه محلی پترووـگالرکین برای آبخوان ساحلی در حالت دوبعدی می‌باشد.

مواد و روش‌ها

بسته به اینکه مبنای کار روش‌های بدون شبکه بر پایه روند فرمول‌بندی، تقریب یا درون‌یابی، یا نمایش دامنه باشد، می‌توان روش‌های مختلفی را در نظر گرفت. روش محلی پترووـگالرکین یکی از روش‌های بدون شبکه می‌باشد (Liu,2002; Atluri and Zhu, 1998). در این مطالعه کلیه مراحل مدل‌سازی و حل معادلات در نرم‌افزار برنامه نویسی متلب انجام شده است.

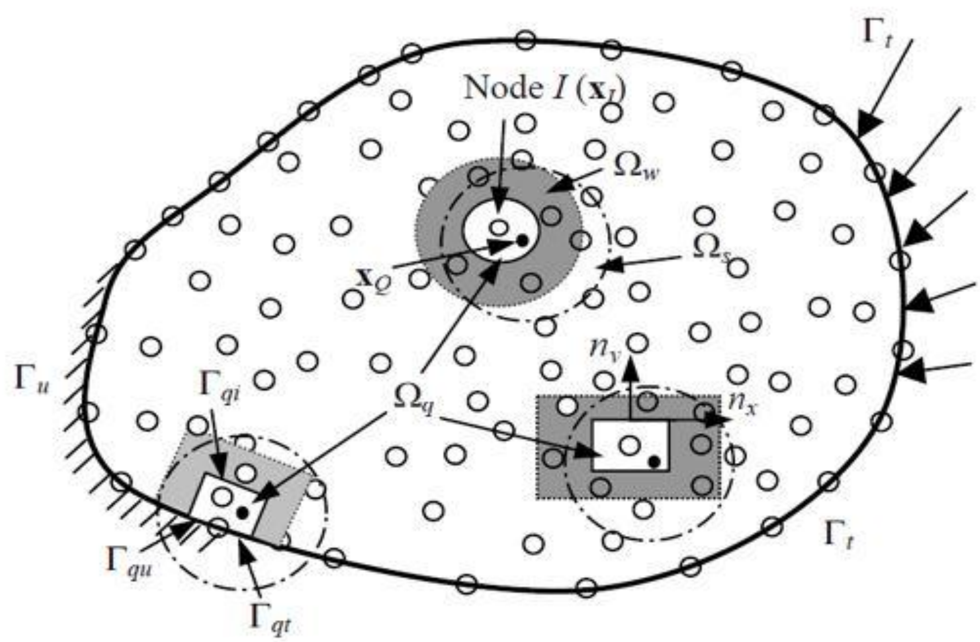
روش عددی بدون شبکه محلی پترووـگالرکین (MLPG)

روش بدون شبکه محلی پترووـگالرکین یکی از روش‌های بدون شبکه واقعی است، زیرا در هیچ یک از مراحل تحلیل اعم از تقریب متغیر میدان و انتگرال‌گیری عددی معادلات فرم ضعیف، نیازی به شبکه‌بندی بر روی دامنه مسئله ندارد.

این روش با استفاده از فرم ضعیف محلی، معادلات را حل می‌کند و برای اولین بار توسط آتلوری و ژو ارائه شد (Atluri & Zhu., 1998). تابع تقریب در این روش حداقل مربعات متحرک می‌باشد و همچنین به‌منظور حل معادلات انتگرالی از روش انتگرال‌گیری گوسی استفاده می‌گردد.

فرمول‌بندی روش محلی بدون شبکه پترووـگالرکین (MLPG)

برای مسائل استاتیک دو بعدی که معادله تعادل و شرایط مرزی روی دامنه Ω و مرز Γ احاطه شده است، به‌صورت روابط (۵۴)، (۵۵) و (۵۶) نوشته می‌شوند و شکل ۱ دامنه مسئله به همراه شرایط مرزی ضروری و طبیعی را نشان می‌دهد که در آن X_Q: نقطه گوسی، Ω_s: دامنه پایه، Ω_q: دامنه انتگرال‌گیری، Ω_w: دامنه تابع وزن، Γ_{qi}: مرز درونی دامنه انتگرال‌گیری، Γ_{qu}: قسمتی از مرز ضروری و Γ_{qt}: قسمتی از مرز طبیعی می‌باشد (Liu and Gu, 2005).



شکل ۱. موقعیت جغرافیایی حوضه آبریز زاینده‌رود.

Fig 1. Geographical location of the Zayande-Rud Basin.

در حالت کلی شکل قوی معادله در مکانیک جامدات به فرم زیر می‌باشد:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$ معادله تعادل (۱)

$$u = \bar{u}$$ شرط مرزی اساسی (۲)

رابطه تنش و کرنش روی مرز طبیعی:

$$\sigma_{ij}.n_j = \bar{t}$$ شرط مرزی طبیعی (۳)

فرم ضعیف پتروو- گالرکین بر روی دامنه محلی حول گره I ام می‌تواند به صورت معادله (۱) نوشته شود:

$$\int_{\Omega_q} (\sigma_{ij,j} + b_i) W_I d\Omega \quad = 0$$ (۴)

W_I تابع وزن است. با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء و قضیه دیورژانس رابطه (۴) را می‌توان ساده‌تر نمود:

$$\int_{\Omega_q} W_I\, \sigma_{ij,j}\, d\Omega \; = \int_{\Gamma_q} W_I\, n_j\, \sigma_{ij}\, d\Gamma - \int_{\Gamma_{\Omega q}} W_{I,j}\, \sigma_{ij}\, d\Omega$$ (۵)

n_j = مولفه j ام بردار واحد قائم بر مرز به سمت خارج

در نهایت با جای‌گذاری معادله (۵) در معادله (۴) انتگرال‌ها بر روی دامنه و مرزها تعیین می‌شوند:

$$\int_{\Gamma_q} W_I\, n_j\, \sigma_{ij}\, d\Gamma - \int_{\Omega_q} [W_{I,j}\, \sigma_{ij} - W_I\, b_i]\, d\Omega = 0$$ (۶)

انتگرال مرزی ترم اول معادله (۶) در حالت کلی شامل سه انتگرال مرزی داخلی، ضروری و طبیعی است. پس:

$$\int_{\Gamma_{qi}} W_I\, n_j\, \sigma_{ij}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_{qu}} W_I\, n_j\, \sigma_{ij}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_{qt}} W_I\, n_j\, \sigma_{ij}\, d\Gamma d\Omega \; - \int_{\Omega_q} [W_{I,j}\, \sigma_{ij} - W_I\, b_i] = 0$$ (۷)

به‌منظور ساده‌سازی انتگرال فرم ضعیف محلی اغلب تابع وزن طوری تعیین می‌شود که ترم انتگرال داخلی حذف شود. بنابراین رابطه فوق ساده‌تر شده:

$$\int_{\Gamma_{qu}} W_I\, n_j\, \sigma_{ij}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_{qt}} W_I\, n_j\, \sigma_{ij}\, d\Gamma d\Omega - \int_{\Omega_q} [W_{I,j}\, \sigma_{ij} - W_I\, b_i] = 0$$ (۸)

با جای‌گذاری رابطه (۳) در (۸):

$$\int_{\Omega_q} W_{I,j}\, \sigma_{ij}\, d\Omega - \int_{\Gamma_{qu}} W_I\, n_j\, \sigma_{ij}\, d\Gamma = \int_{\Gamma_{qt}} \bar{t}\, W_I\, d\Gamma + \int_{\Omega_q} W_I\, b_i\, d\Omega$$ (۹)

تقریب جابجایی با به‌کارگیری توابع $\emptyset_i$ که تابع شکل MLS هستند و به شکل ماتریس ارائه می‌شوند به فرم زیر می‌باشد:

$$U^h_{2\times 1}(X) = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset_1 & 0 & \cdots & \emptyset_n & 0 \\ 0 & \emptyset_1 & & 0 & \emptyset_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \cdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} = \Phi_{(2\times 2n)} u_{(2n\times 1)}$$ (۱۰)

با جای‌گذاری رابطه (۱۰) در مولفه جابجایی معادله (۱) فرم ضعیف و گسسته شده معادلات در روش MLPG به‌صورت دستگاه معادلات می‌باشد. که:

$$K_I\, u = F_I \tag{۱۱}$$

K_I = ماتریس سختی گره I ام، u = ماتریس مجهولات و F_I = بردار نیروی گره‌ی

$$K_I = \int_{\Omega_q} V_I^T\; D\; B\; d\Omega - \int_{q_u} W_I^T\; n\; D\; B\; d\Gamma \tag{۱۲}$$

$$F_I = \int_{\Omega_q} W_I^T\; b\; d\Omega + \int_{\Gamma q_t} W_I^T\; t\; d\Gamma \tag{۱۳}$$

در رابطه (۱۲) (۱۳)، W ماتریس وزن کلی و V مشتق تابع وزن و D ثابت ماده است. لازم به ذکر است که مقادیر K_I و F_I با انتگرال‌گیری گوسی به‌دست می‌آیند.

تابع تقریب حداقل مربعات متحرک

از این تابع برای درون‌یابی نقاط با مقادیر متغیر استفاده می‌کنند. این تابع بیشتر در روش‌های بدون شبکه شکل ضعیف کاربرد دارد. از ویژگی‌های آن می‌توان به ایجاد محیط پیوسته برای درون‌یابی تابع میدان و تقریب‌سازی با مرتبه دلخواه اشاره نمود. این تابع به سه پارامتر تابع وزن نقطه‌ای، تابع چندجمله‌ای و مجموعه ضرایبی که به موقعیت نقاط بستگی دارند وابسته می‌باشد (Akbarpour et al., 2019). به طوری که اولین بار نیرولز و همکاران در سال ۱۹۹۲ این تابع را به منظور گسترش روش المان توسعه‌ای معرفی کردند. بلچکو و همکاران در سال ۱۹۹۴ و آتلوری و ژو در سال ۱۹۹۸ برای ساخت توابع شکل خود به ترتیب در روش‌های بدون المان گالرکین و روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین از تابع تقریب حداقل مربعات متحرک بهره بردهاند (Atluri et al., 1998; Belytschko et al., 1994).

اگر $U^h(x)$ یک تابع تغییرات میدانی در محدوده مورد بررسی Ω باشد، تقریب $U(x)$ در نقطه x با $U^h(x)$ نشان داده می‌شود. تقریب حداقل مربعات متحرک که متغیر میدان را به صورت محلی از ضرب ماتریس چند جمله‌ای در ماتریس ضرایب توصیف می‌کند به فرم رابطه (۱۴) بیان می‌شود.

$$U^h(x) = \sum_{j}^{m} p_j(x) a_j(x) = p^t(x) a(x) \tag{۱۴}$$

که در آن m تعداد جملات تشکیل‌دهنده، $p(x)$ و $a(x)$ بردار ضرایب $p(x)$ است که به صورت رابطه (۱۵) تعریف می‌شود.

$$a^T(x) = \{a_1(x) \quad a_2(x) \quad \dots \quad a_m(x)\} \tag{۱۵}$$

در رابطه (۱۵)، $p(x)$ یک بردار از توابع پایه است، که اغلب شامل حداکثر تک جمله‌ای‌های لازم برای حصول حداقل کامل بودن، می‌باشد. در فضای یک بعدی، یک پایه چند جمله‌ای کامل از مرتبه m طبقه رابطه (۱۶) بیان می‌گردد:

$$p^T(x) = \{1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^m\} \tag{۱۶}$$

و در فضای دو بعدی $(x.y)$:

$$p^T(x.y) = \{1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \dots \quad y^m\} \tag{۱۷}$$

به طور کلی بردار $p(x)$ بر اساس مثلث خیام-پاسکال ساخته می‌شود.

به منظور تعیین ضرایب مجهول $a(X)$، تابع وزن‌دار نرم در رابطه (۱۸) باید حداقل شود.

$$\mathrm{J} = \sum_{I}^{n} W(X - X_I)[P^T(X_I)a(X) - U_I]^2 \tag{۱۸}$$

در رابطه (۱۸)، $W_i(X)$ نشان دهنده تابع وزن مربوط به نقطه گره‌ی I و مقدار داخل کروشه اختلاف بین مقدار تخمین زده شده در نقطه I و مقدار داده شده در همان نقطه می‌باشند. همچنین n تعداد نقاط در ناحیه حمایتی است به نحوی که تابع وزن $W_i(X)$ مقادیر غیر صفری در آن خواهد داشت. به منظور مینیمم کردن تابع J شرط رابطه (۱۹) مورد بررسی قرار می‌گیرد.

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \qquad (۱۹)$$

که نهایتاً منجر به رابطه خطی (۲۰) می‌شود.

$$a(x) = A^{-1}(X)B(X)U_S \qquad (۲۰)$$

در معادله (۲۰)، $A(X)$، $B(X)$ و U_S به ترتیب در روابط (۲۱)، (۲۲) و (۲۴) تعریف می‌شوند.

$$A(X) = \sum_{I}^{n} W(X_I)p(X_I)P^T(X_I) \qquad (۲۱)$$

$$B(X) = [B_1 \ \ B_2 \ \ \dots \ \ B_n] \qquad (۲۲)$$

$$B(X) = [W_1 p(x_1) W_2 p(x_2) \dots W_n p(x_n)] \qquad (۲۳)$$

$$U_S = [U_1 \ \ U_2 \ \ \dots \ \ U_n] \qquad (۲۴)$$

با جای‌گذاری رابطه (۲۰) در رابطه (۱۴) تقریب حداقل مربعات متحرک به صورت روابط (۲۵) و (۲۶) ارائه می‌گردند:

$$U^h(X) = \sum_{I}^{n}\sum_{j}^{m} P_j(X)\left(A^{-1}(X)B(X)\right)_{jI}U_I \qquad (۲۵)$$

$$U^h(X) = \sum_{I}^{n} \emptyset_I(X)U_I \qquad (۲۶)$$

که در آن $U^h(X)$ تقریب تابع $\emptyset_I(X)$ تابع شکل و U_I پارامتر گره‌ی می‌باشد. به عبارتی دیگر تابع شکل بصورت رابطه (۲۷) بیان می‌گردد:

$$\emptyset_I(X) = \sum_{j}^{m} P_j(X)\left(A^{-1}(X)B(X)\right)_{jI} = P^T A^{-1}B_I \qquad (۲۷)$$

تابع وزن

انتخاب تابع وزن نقش مهمی در عمل تقریب‌سازی توسط تابع تقریب حداقل مربعات متحرک دارد. ویژگی‌های تابع وزن به شرح زیر می‌باشد (Akbarpour et al., 2019):

- مقدار تابع وزن در داخل دامنه حمایتی مثبت است.
- مقدار تابع وزن در خارج دامنه حمایتی صفر است.
- مقدار تابع وزن به صورت یکنواخت نسبت به نقطه دلخواه، کاهش می‌یابد.
- مقدار تابع وزن به میزان مناسبی روی مرزها هموار عمل می‌کند.

این تابع به صورت‌های گوسی و اسپیلاین مورد استفاده قرار می‌گیرد، از آن جایی که در این مطالعه از تابع وزن اسپیلاین استفاده شده است، نحوه محاسبه آن در رابطه (۲۸) شرح داده می‌شود.

$$W_i(X) = \begin{cases} 2/3 - 4\bar{r}_i^2 + 4\bar{r}_i^3 & \bar{r}_i \le 0.5 \\ 4/3 - 4\bar{r}_i + 4\bar{r}_i^2 - 4/3\bar{r}_i^3 & 0.5 \le \bar{r}_i \le 1 \\ 0 & \bar{r}_i \ge 1 \end{cases} \qquad (۲۸)$$

در رابطه (۲۸)، r_w شعاع تأثیر نقطه گره‌ی x_i می‌باشد. برای هر نقطه، r_w باید به گونه‌ای انتخاب شود که تعداد وزن‌های غیر صفر بزرگ‌تر از تعداد تک تک جملات موجود در چند جمله‌ای باشند. (n> m)

معادلات نفوذ آب‌شور

در این مطالعه از روش جریان با جرم مخصوص متغیر استفاده گردید. غلظت نمک محلول در آب با نفوذ به داخل آبخوان با حل همزمان دو معادله جریان و انتقال محلول به‌دست می‌آید. معادلات جریان و انتقال محلول در محیط متخلخل و همسان مطابق زیر نوشته می‌شوند (Rastogi, 2004).

معادله جریان

معادله دارسی:

$$q_i = -\frac{k_{ij}}{\mu}[\frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho . g . e_j] \quad (۲۹)$$

k_{ij} نفوذپذیری ذاتی در محیط متخلخل (L^2)، μ = ویسکوزیته دینامیکی سیال ($ML^{-1}T^{-1}$)، p = فشار سیال ($ML^{-1}T^{-2}$)، ρ = چگالی سیال (ML^{-3})، e_j = مولفه بردار واحد جاذبه (LT^{-2})، g = شتاب جاذبه (LT^{-2})

معادله جریان:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho . q_i) = 0 \quad (۳۰)$$

رابطه بین چگالی سیال و غلظت مطابق زیر می‌باشد:

$$\rho = \rho_f(1 + \varepsilon . C) \quad (۳۱)$$

ρ_f = چگالی آب شیرین (ML^{-3})، C = غلظت آلاینده (ML^{-3})

$$\varepsilon = \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} \quad (۳۲)$$

ρ_s = چگالی آب‌شور (ML^{-3})

$$\frac{\rho}{\rho_f} - 1 = \rho_r = \varepsilon . C \quad (۳۳)$$

$$h = \frac{\mathrm{p}}{\rho_f . g} + y \quad (۳۴)$$

y = ارتفاع از مبدأ (L)، h = هد آبخوان (L)

با جای‌گذاری روابط (۳۳) و (۳۴) در رابطه (۲۹):

$$q_i = -k_{ij}[\frac{\partial h}{\partial x_j} + \varepsilon . C . e_j] \quad (۳۵)$$

k_{ij} = تنسور هدایت هیدرولیکی (LT^{-1})

متغیرهای بدون بعد:

$$x' = \frac{x}{d}, y' = \frac{y}{d}, h' = \frac{h}{d}, C' = \frac{C}{C_S}, k'_{Lyy} = \frac{k_{yy}}{k_{Lxx}}, k'_{Lxx} = \frac{k_{xx}}{k_{Lxx}}, V'_x = \frac{V_x}{V}, V'_y = \frac{V_y}{V} \quad (۳۶)$$

$$\alpha'_T = \frac{\alpha_T}{\alpha_L}, \alpha'_L = \frac{\alpha_L}{\alpha_L} = 1, d_L = \frac{d}{\alpha_L}$$

V = سرعت خطی میانگین (LT^{-1})، d = عمق آبخوان ساحلی محصور (L)، C_S = غلظت آب دریا (ML^{-3})، k_{xx}, k_{yy} = مولفه‌های تنسور هدایت هیدرولیکی در بالاترین آبخوان (LT^{-1})، k_{Lxx}, k_{Lyy} = مولفه‌های تنسور هدایت هیدرولیکی در پایین‌ترین آبخوان (LT^{-1})

با جای‌گذاری روابط (۳۶) در رابطه (۳۰) و مشتق‌گیری از آن‌ها در حالت دوبعدی معادلات جریان مطابق زیر می‌باشند:

$$k_{Lxx}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_{Lyy}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -k_{Lyy} . \varepsilon . \frac{\partial C}{\partial y} \quad (۳۷)$$

سرعت خطی میانگین V_x و V_y در حالت بدون بعد برای سیستم مختصات دوبعدی به شرح زیر است:

$$V_x = -\frac{A}{\theta}.k_{Lxx}.(\frac{\partial h}{\partial x}) \qquad (۳۸)$$

$$V_y = -\frac{A}{\theta}.k_{Lyy}.(\frac{\partial h}{\partial y} + \varepsilon.C) \qquad (۳۹)$$

که $V_i = \frac{k_{Lii}}{A}$، $\frac{1}{A}$ = گرادیان هد پزومتری، θ = تخلخل می‌باشد.

معادله انتقال

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{ij}.\frac{\partial C_i}{\partial x_j}\right) - V_i.\frac{\partial C}{\partial x_i} = 0 \qquad (۴۰)$$

D_{ij} = ضریب پخش (L^2T^{-1})، v_i = مولفه سرعت نفوذی (LT^{-1})، C = غلظت آلاینده (ML^{-3}). تغییر متغیرهای داخل بخش معادله جریان به‌طور مشابه صورت گرفته و معادله حاکم بر انتقال در حالت بدون بعد برای سیستم مختصات دوبعدی به‌شکل زیر می‌باشد:

$$D_{xx}.\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_{yy}.\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_{xy}.\frac{\partial^2 C}{\partial x.\partial y} + D_{yx}.\frac{\partial^2 C}{\partial y.\partial x} - \left(V_x.\frac{\partial C}{\partial x} + V_y.\frac{\partial C}{\partial y}\right).d_L = 0 \qquad (۴۱)$$

که در آن:

$$D_{xx} = \frac{V_x^2}{|V|} + \alpha_T.\frac{V_y^2}{|V|} \qquad (۴۲)$$

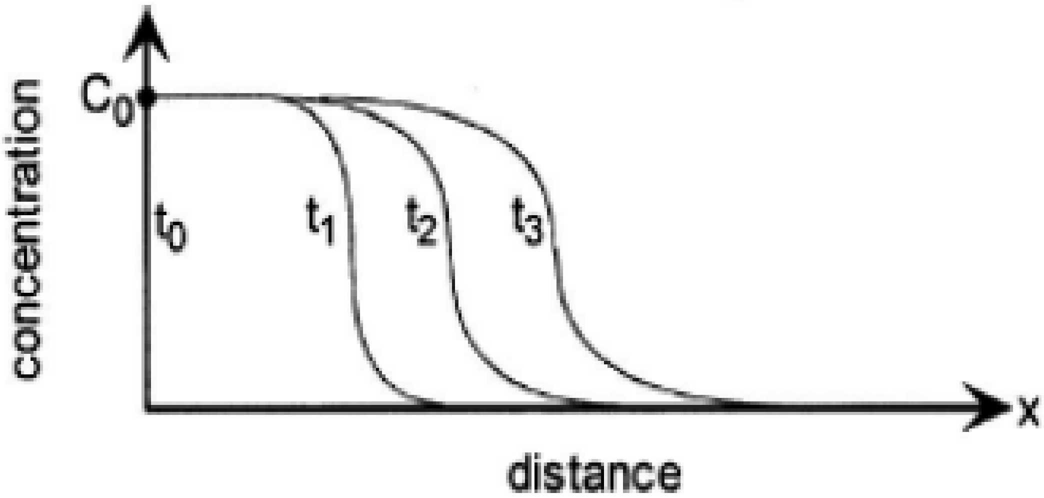
$$D_{yy} = \frac{V_y^2}{|V|} + \alpha_L.\frac{V_x^2}{|V|} \qquad (۴۳)$$

$$D_{xy} = D_{yx} = (1-\alpha_T).\frac{V_x.V_y}{|V|} \qquad (۴۴)$$

D_{ij} = تنسور پخش در محیط دوبعدی که ترم‌های آن بدون بعد، α_T = انتشار عرضی، α_L = انتشار طولی می‌باشند.

پخشیدگی

به‌طور کلی پخش ماده محلول در آبخوان به دو شکل مکانیکی و مولکولی رخ می‌دهد. این پدیده باعث گسترش آلودگی در جهات طولی و عرضی می‌شود. با گذر زمان آلودگی از سمت منبع آلودگی که در این تحقیق دریا می‌باشد به سمت آب شیرین پخش می‌گردد.



شکل ۲. مدل مفهومی انتقال آلاینده در اثر پدیده پخش.

Fig 2. Conceptual model of pollutant transfer due to diffusion phenomenon.

پخش مولکولی

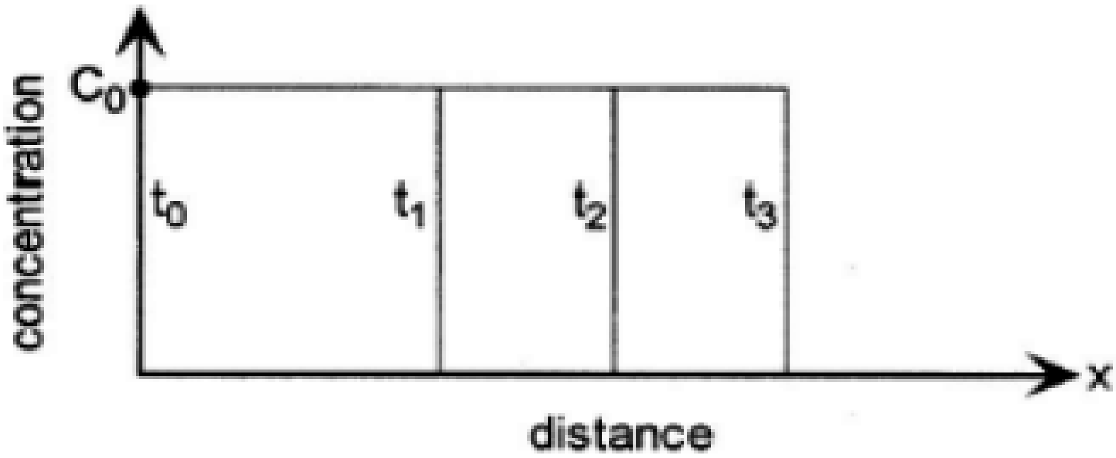
پخش مولکولی با توزیع یکنواخت غلظت نمک در اثر حرکت براونی مولکول‌ها ایجاد می‌شود. همچنین میزان انتشار و رقیق شدن غلظت ماده آلاینده به خواص آلاینده و گرادیان غلظت آن وابسته است.

پخش مکانیکی

پخش مکانیکی در اثر حرکت آب زیرزمینی و اختلاط با ماده آلاینده ایجاد می‌شود و میزان اختلاط آن وابسته به خواص آبخوان و مستقل از خواص آلاینده است. سرعت جریان در جهت طولی و عرضی برای محیط همگن ثابت و برای متخلخل متغیر می‌باشد. در واقع پخش مکانیکی باعث گسترش آلودگی در جهات طولی و عرضی و عمود می‌شود که غلظت نمک محلول کاهش می‌یابد.

جابه‌جایی

حرکت آلودگی توسط آب زیرزمینی را همرفت یا جابجایی گویند. میزان انتقال وابسته به خواص آبخوان از جمله هدایت هیدرولیکی، تخلخل مؤثر و گرادیان و مستقل از ویژگی ماده آلاینده می‌باشد. مدل مفهومی با فرض این‌که پدیده پخش وجود نداشته و جریان دائمی تحت تأثیر هد باشد، در اثر پدیده همرفت یا جابجایی با گذر زمان آلاینده از منبع آلایندگی در مسیر جریان حرکت می‌کند. لازم به ذکر است که طی فرایند انتقال همرفت میزان آلایندگی ثابت می‌ماند.



شکل ۳. مدل مفهومی انتقال آلاینده در اثر پدیده جابجایی.

Fig 3. Conceptual model of pollutant transfer due to displacement phenomenon.

گسسته‌سازی معادلات جریان و انتقال با روش بدون شبکه پترووـگالرکین

معادلات نفوذ آب‌شور شامل معادله جریان و معادله انتقال محلول می‌باشند که در ادامه به روش بدون شبکه پترووـ گالرکین گسسته‌سازی می‌شوند (Rastogi et al., 2004).

گسسته‌سازی معادله سطح آب زیرزمینی

$$k_{Lxx}.\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+k_{Lyy}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=-k_{Lyy}.\varepsilon.\frac{\partial C}{\partial y} \qquad (۴۵)$$

$$k_{Lxx}.\int_{\Omega}W_i.\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}d\Omega+k_{Lyy}.\int_{\Omega}W_i.\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}d\Omega=-k_{Lyy}.\varepsilon.\int_{A}W_i.\frac{\partial C}{\partial y}dA \qquad (۴۶)$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء:

$$k_{Lxx}.\int_{S}W_i.\frac{\partial h}{\partial x}dS-k_{Lxx}.\int_{A}\frac{\partial W_i}{\partial x}.\frac{\partial h}{\partial x}dA+k_{Lyy}.\int_{S}W_i.\frac{\partial h}{\partial y}dS-k_{Lyy}.\int_{A}\frac{\partial W_i}{\partial y}.\frac{\partial h}{\partial y}dA \qquad (۴۷)$$

$$= -k_{Lyy}.\varepsilon.\int_A W_i.\frac{\partial C}{\partial y}dA$$

$$h = \sum h_i.\emptyset_i \quad (۴۸)$$

$$C = \sum C_i.\emptyset_i \quad (۴۹)$$

با جای‌گذاری معادلات (۴۸) و (۴۹) در معادله (۴۷) و مشتق‌گیری از توابع شکل آن‌ها حالت گسسته معادله سطح آب زیرزمینی خواهد شد:

$$k_{Lxx}.\int_A \frac{\partial W_i}{\partial x}.\frac{\partial \emptyset}{\partial x}.hdA + k_{Lyy}.\int_A \frac{\partial W_i}{\partial y}.\frac{\partial \emptyset}{\partial y}.hdA$$
$$= k_{Lyy}.\varepsilon.\int_A W_i.\frac{\partial \emptyset}{\partial y}.CdA + k_{Lxx}.\int_S W_i.\frac{\partial h}{\partial x}.n_x dS \quad (۵۰)$$
$$+k_{Lyy}.\int_S W_i.\frac{\partial h}{\partial y}.n_y dS$$

با دستگاه معادله:

$$K_1\,.\,u_1 = F_1 \quad (۵۱)$$

$$K_1 = k_{Lxx}.\int_A \frac{\partial W_i}{\partial x}.\frac{\partial \emptyset}{\partial x}dA + k_{Lyy}.\int_A \frac{\partial W_i}{\partial y}.\frac{\partial \emptyset}{\partial y}dA \quad (۵۲)$$

$$u_1 = h \quad (۵۳)$$

$$F_1 = k_{Lyy}.\varepsilon.\int_A W_i.\frac{\partial \emptyset}{\partial y}.CdA + k_{Lxx}.\int_S W_i.\frac{\partial h}{\partial x}.n_x dS + k_{Lyy}.\int_S W_i.\frac{\partial h}{\partial y}.n_y dS \quad (۵۴)$$

ماتریس سختی K_1 طبق توابع شکل و وزن و بردار نیروی گره‌ی F_1 با معلوم بودن شرط اولیه غلظت در دامنه و همچنین شرط مرزی نیومن در جهت x و y تعیین می‌گردند.

گسسته‌سازی معادله انتقال

$$D_{xx}.\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_{yy}.\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_{xy}.\frac{\partial^2 C}{\partial x.\partial y} + D_{yx}.\frac{\partial^2 C}{\partial y.\partial x} - \left(V_x.\frac{\partial C}{\partial x} + V_y.\frac{\partial C}{\partial y}\right).d_L = 0 \quad (۵۵)$$

$$D_{xx}.\int_\Omega W_i.\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}d\Omega + D_{yy}.\int_\Omega W_i.\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}d\Omega$$
$$+D_{xy}.\int_\Omega W_i.\frac{\partial^2 C}{\partial x.\partial y}d\Omega + D_{yx}.\int_\Omega W_i.\frac{\partial^2 C}{\partial y.\partial x}d\Omega \quad (۵۶)$$
$$-d_L.V_x.\int_\Omega W_i.\frac{\partial C}{\partial x}d\Omega - d_L.V_y.\int_\Omega W_i.\frac{\partial C}{\partial y}d\Omega = 0$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء:

$$D_{xx}.\int_S W_i.\frac{\partial C}{\partial x}dS - D_{xx}.\int_A \frac{\partial W_i}{\partial x}.\frac{\partial C}{\partial x}dA$$
$$+D_{yy}.\int_S W_i.\frac{\partial C}{\partial y}dS - D_{yy}.\int_A \frac{\partial W_i}{\partial y}.\frac{\partial C}{\partial y}dA \quad (۵۷)$$
$$+D_{xy}.\int_S W_i.\frac{\partial C}{\partial y}dS - D_{xy}.\int_A \frac{\partial W_i}{\partial x}.\frac{\partial C}{\partial y}dA$$

$$+D_{yx}.\int_S W_i.\frac{\partial C}{\partial x}dS-D_{yx}.\int_A \frac{\partial W_i}{\partial y}.\frac{\partial C}{\partial x}dA$$
$$-d_L.V_x.\int_A W_i.\frac{\partial C}{\partial x}dA-d_L.V_y.\int_A W_i.\frac{\partial C}{\partial y}dA=0$$

با جای‌گذاری رابطه (۳-۷۱) در معادله (۳-۹۶) و مشتق‌گیری از توابع شکل آن‌ها حالت گسسته معادله انتقال خواهد شد:

$$D_{xx}.\int_A \frac{\partial W_i}{\partial x}.\frac{\partial \emptyset}{\partial x}.CdA+D_{yy}.\int_A \frac{\partial W_i}{\partial y}.\frac{\partial \emptyset}{\partial y}.CdA$$
$$+D_{xy}.\int_A \frac{\partial W_i}{\partial x}.\frac{\partial \emptyset}{\partial y}.CdA+D_{yx}..\int_A \frac{\partial W_i}{\partial y}.\frac{\partial \emptyset}{\partial x}.CdA$$
$$+d_L.V_x.\int_A W_i.\frac{\partial \emptyset}{\partial x}.CdA+d_L.V_y.\int_A W_i.\frac{\partial \emptyset}{\partial y}.CdA \qquad (۵۸)$$
$$=D_{xx}.\int_S W_i.\frac{\partial C}{\partial x}.n_x dS+D_{yy}.\int_S W_i.\frac{\partial C}{\partial y}.n_y dS$$
$$.\int_S W_i.\frac{\partial C}{\partial y}.n_y dS+D_{yx}.\int_S W_i.\frac{\partial C}{\partial x}.n_x dS$$

با دستگاه معادله

$$K_4\,.\,u_4=F_4 \qquad (۵۹)$$

$$K_4=D_{xx}.\int_A \frac{\partial W_i}{\partial x}.\frac{\partial \emptyset}{\partial x}dA+D_{yy}.\int_A \frac{\partial W_i}{\partial y}.\frac{\partial \emptyset}{\partial y}dA$$
$$+D_{xy}.\int_A \frac{\partial W_i}{\partial x}.\frac{\partial \emptyset}{\partial y}dA+D_{yx}..\int_A \frac{\partial W_i}{\partial y}.\frac{\partial \emptyset}{\partial x}dA \qquad (۶۰)$$
$$+d_L.V_x.\int_A W_i.\frac{\partial \emptyset}{\partial x}dA+d_L.V_y.\int_A W_i.\frac{\partial \emptyset}{\partial y}dA$$

$$u_4=C \qquad (۶۱)$$

$$F_4=D_{xx}.\int_S W_i.\frac{\partial C}{\partial x}.n_x dS+D_{yy}.\int_S W_i.\frac{\partial C}{\partial y}.n_y dS+D_{xy}.\int_S W_i.\frac{\partial C}{\partial y}.n_y dS$$
$$+D_{yx}.\int_S W_i.\frac{\partial C}{\partial x}.n_x dS \qquad (۶۲)$$

ماتریس سختی معادله انتقال با معلوم بودن پارامترهای پراکندگی، سرعت و توابع شکل و وزن قابل تعیین بوده و بردار نیروی گره‌ی نیز با مشخص بودن شرط مرزی نیومن برای غلظت در جهت x معلوم می‌باشد. لازم به ذکر است که در مسئله نفوذ آب‌شور شرط مرزی نیومن غلظت در جهت y موجود نیست پس ترم دوم و سوم انتگرال مرزی قابل حذف می‌باشد.

شبیه‌ساز FEFLOW

مدل FEFLOW، یک سامانه تعاملی برای مدل‌سازی آب‌های زیرزمینی به روش المان محدود می‌باشد که قادر است جریان زیرسطحی و انتقال آلودگی را در شرایط سه بعدی و دو بعدی در برای مقاطع افقی، عمودی و متقارن در حالت اشباع یا غیراشباع، شرایط ماندگار یا غیر ماندگار، انتقال جرم و عناصر واکنشی را در محیط متخلخل مدل‌سازی کند.

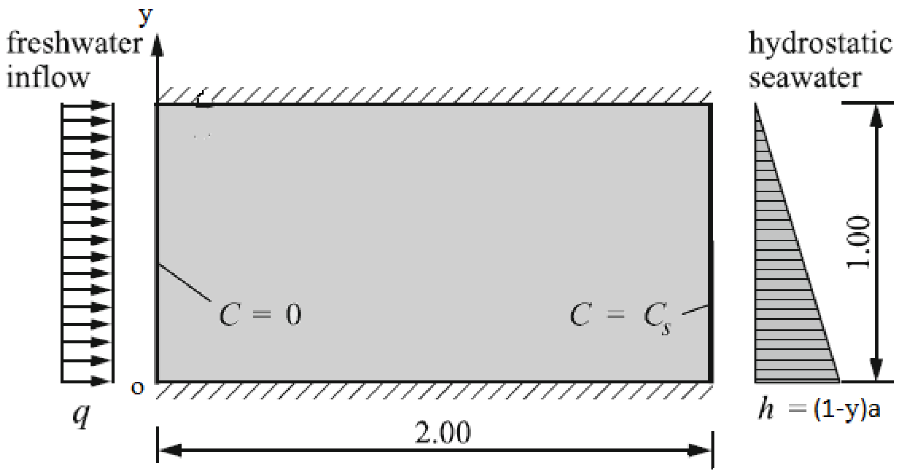
ابزارهای گرافیکی آن نتایج نهایی به‌شکل سطحی، حجمی، چرخشی و سایه‌گذاری را به همراه مکان‌نما سه‌بعدی و الگوهای بردار جریان و مسیرها نمایش می‌دهد. این مدل توانایی مدل‌سازی با سطوح آزاد یا غیر آزاد مسائلی از قبیل جریان آب زیرزمینی دینامیکی وابسته یا مستقل از غلظت، جریان و انتقال اشباع متغیر در دو بعد و

سه‌بعد، جریان ناپایدار، انتقال آلودگی همرفت و پراکنده با گونه‌های شیمیایی جذب و پخش هیدرو دینامیکی و هم‌چنین فرایندهای انتقال گرما زیرسطحی که تأثیرات غلظت سیال باعث آلودگی محلول و ایجاد میدان حرارتی می‌شود را دارد. از ویژگی‌های مدل می‌توان به مواردی چون بررسی توزیع مکانی و زمانی هدها و آلودگی‌های آب زیرزمینی، تحلیل دینامیکی نفوذ، مدل‌سازی فرآیندهای ژئوترمال، تحلیل مدت زمان آلودگی در آبخوان، طراحی و برنامه‌ریزی استراتژی‌های اصلاحی و ایجاد طرح‌های نظارتی مؤثر و جایگزین اشاره نمود (Diersch, 1992).

نتایج و بحث

مسئله هنری

در این مسئله یک برش عمودی از آبخوان همگن و همسان که شار آب شیرین با C=0 از یک مرز و آب‌شور دریا با C>0 از مرز دیگر وارد می‌شود و تداخل آب‌شور و شیرین در داخل مقطع اتفاق می‌افتد در نظر گرفته شد. مرزهای بالا و پایین آبخوان نفوذناپذیر می‌باشند. سفره دارای ضریب ذخیره ویژه صفر، انتشار طولی و عرضی صفر، تخلخل ۰/۳۵ و ضریب انتشار مولکولی $6.6 * 10^{-6}$ در سیستم واحد SI می‌باشد (Diersch, 2014).



شکل ۴. تعریف مسئله هنری.

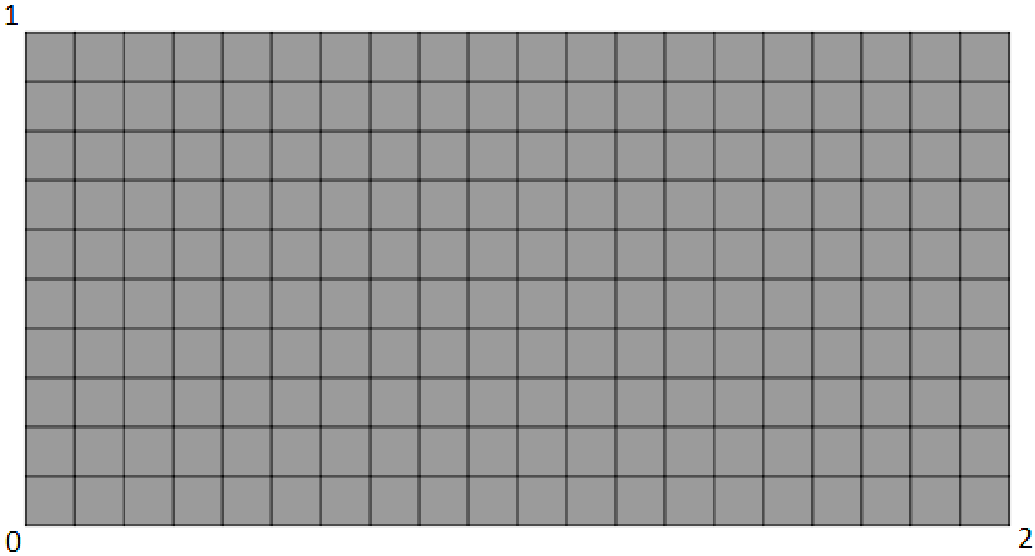
Fig 4. Definition of The Henry problem.

شبکه‌بندی

مختصات دامنه مسئله به شرح زیر است:

$$0 \leq X \geq 2$$
$$0 \leq Y \geq 1$$

شبکه‌بندی با فواصل ۰/۱ در دو جهت طولی و عرضی انجام گرفت و شبکه شامل ۲۰۰ سلول و ۲۳۱ گره می‌باشد.

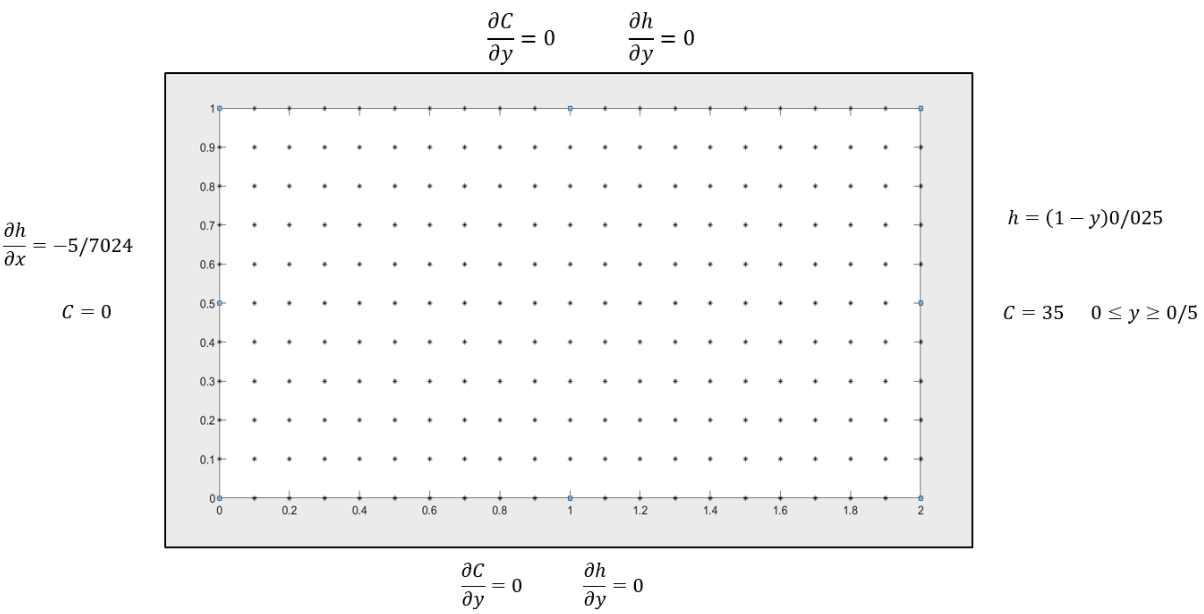


شکل ۵. شبکه‌بندی آبخوان هنری با فاصله‌گذاری ۰/۱.

Fig 5. Networking of Henry aquifer with spacing of 0.1.

شرایط مرزی و اولیه

در مسئله هنری شرایط مرزی نیومان برای هد و دیریشله برای هد و غلظت برقرار است. برای پارامتر غلظت شرط اولیه نیز تعریف شده و برای گره‌های داخلی صفر فرض شده‌اند. در شکل (۴) و جدول (۱) شرایط صورت مسئله هنری به‌طور کامل تعریف شده است (Rastogi, 2004).



شکل ۶. نحوه پخش گره‌ی و شرایط مرزی آبخوان دوبعدی مسئله هنری.

Fig 6. Nodal distribution and boundary conditions of the two-dimensional aquifer of the Henry problem.

جدول ۱. شرایط مرزی و اولیه مسئله هنری.

Table 1. Boundary and initial conditions of the Henry problem.

غلظت Concentration	هد Head	شرایط مرزی Boundary Conditions

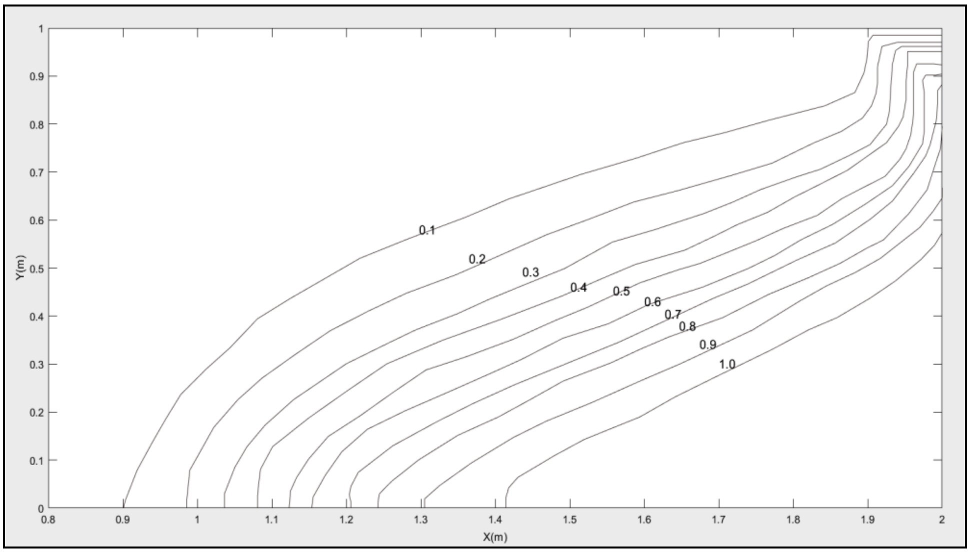
مرز چپ (0, y) Left border (0, y)	$\frac{\partial h}{\partial x}(0,y) = -5/7024$	$C(0,y) = 0$
مرز راست (2, y) Right border (2, y)	$h(2,y) = (1-y)0/025$	$C(2,y) = 35, 0 \leq y \geq 0/5$
مرز بالا (x,1) Top border (x, 1)	بدون جریان No flow	$\frac{\partial C}{\partial y}(x,1) = 0$
مرز پایین (x,0) Bottom border (x, 0)	بدون جریان No flow	$\frac{\partial C}{\partial y}(x,0) = 0$

مدل‌سازی مسئله هنری

مسئله استاندارد هنری حالت خاصی از پدیده نفوذ آب‌شور یا همان تداخل آب شیرین و آب‌شور می‌باشد. به این علت که پدیده مذکور نوعی از آلودگی به حساب می‌آید و در حالت دوبعدی مدل‌سازی شده معادله آلودگی برای حل دقیق کاربرد چندانی نداشته و با حل همزمان معادلات انتقال و جریان به روش عددی مسئله قابل حل است؛ بنابراین، حل عددی یا تحلیلی برای آن موجود نیست. از طرفی چون برای این مسئله داده آزمایشگاهی نیز موجود نمی‌باشد به‌منظور ارزیابی عملکرد مدل روش‌های خطاگیری کاربردی نداشته و سعی بر این شد تا علاوه بر روش بدون شبکه پترووـگالرکین محلی از مدل اجزا محدود FEFLOW نیز برای مدل‌سازی استفاده شود تا نتایج دو روش با هم مقایسه گردند و صحت کار سنجیده شود.

روش عددی

خروجی حاصل از مدل‌سازی به این روش مطابق شکل (۵) و شکل (۶) می‌باشد. منحنی‌های داخل شکل (۵) خطوط کانتوری هستند که نقاط هم‌غلظت آبخوان را تعیین می‌کنند. در ادامه جدول (۲) به‌عنوان نمونه منحنی‌ها را در نقاط با مختصات افقی ثابت و مختصات عمودی متغیر بررسی می‌نماید. بردارهای سرعت در محیط آبخوان نیز مطابق شکل (۶) می‌باشد.



شکل ۷. منحنی‌های هم‌غلظت مسئله هنری به روش MLPG برای فواصل ۰/۱.

Fig 7. Co-concentration curves of Henry problem by MLPG method for intervals of 0.1.

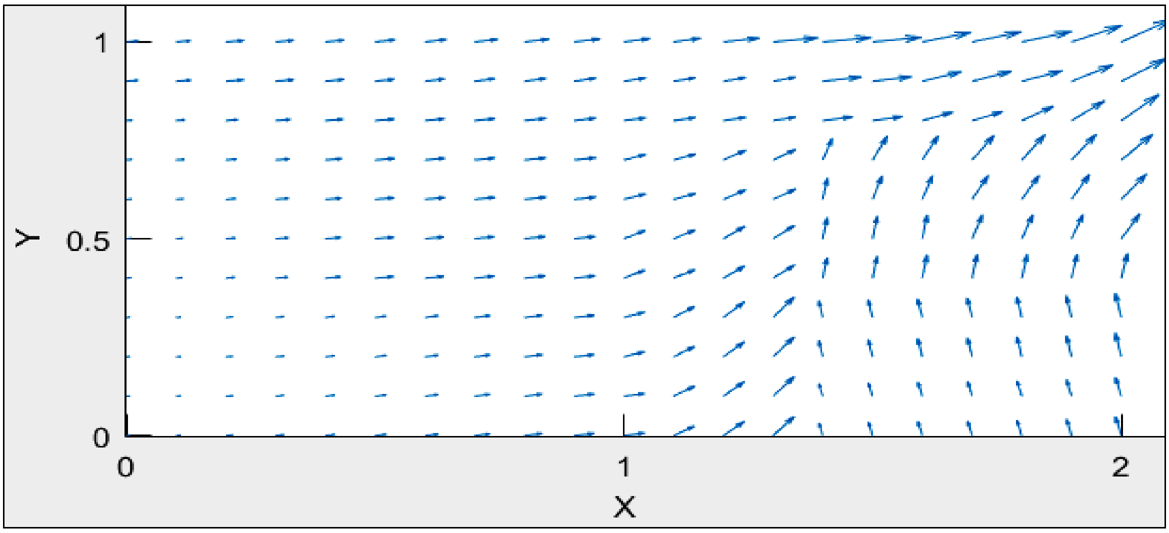
جدول ۲. موقعیت و مقدار منحنی‌های هم غلظت در x=1/5m.

Table 2. Position and value of isoconcentration curves at x=1.5m.

Y (m)	0.12	0.21	0.26	0.31	0.36	0.4	0.44	0.51	0.58	0.68

غلظت نسبی Relative concentration	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1

مطابق شکل (۵) و جدول (۲) با نفوذ آب‌شور دریا به آبخوان از سمت راست تأثیرات شوری تا نیمی از آبخوان ادامه داشته و با افزایش فاصله از مدخل آلاینده مقدار غلظت نسبی کاهش می‌یابد. از نظم منحنی‌ها و توازی آن‌ها نیز می‌توان تفسیر نمود که میزان پخش آلودگی و تغییرات غلظت در هر دو جهت به یک اندازه می‌باشد. شکل ایزوکلرها گردش آب دریا در پایین آبخوان و کاهش نفوذ آب دریا را در محدوده خشکی نشان می‌دهد. هم‌چنین میزان نفوذ در منطقه بالای آبخوان کمتر از پایین آن می‌باشد.



شکل ۸. بردارهای سرعت مسئله هنری به روش MLPG برای فواصل ۰/۱.

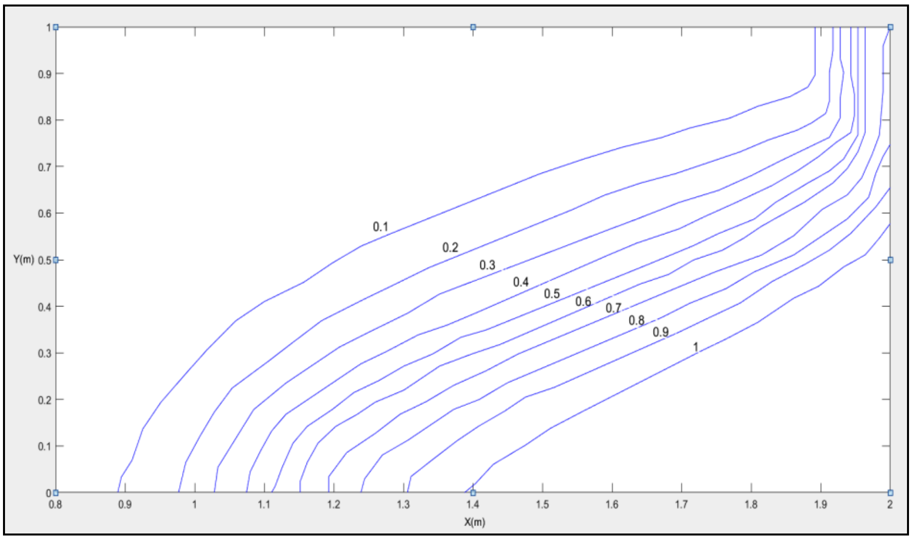
Fig 8. Velocity vectors of Henry problem by MLPG method for 0.1 intervals.

مطابق شکل (۶) بردارهای سرعت که مماس بر خط جریان می‌باشند مسیر جریان را نمایش می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود گرادیان هد هیدرولیکی در طرف دریا به‌طور عمودی به سمت بالا مخالف جاذبه زمین جهت می‌گیرد و در بخشی که تأثیر آلودگی ناچیز می‌باشد شار ورودی تقریباً به‌شکل افقی در جریان است.

روش FEFLOW

به‌منظور درک برخی از مسائل، پیش‌بینی و کنترل آن‌ها می‌توان از مدل‌هایی از قبیل FEFLOW که اساس کار آن‌ها روش اجزا محدود و شبکه‌بندی دامنه است استفاده نمود. مدل FEFLOW سیستم شبیه‌سازی جریان زیرزمینی به روش اجزا محدود می‌باشد و معادلات جریان و انتقال را در محیط متخلخل برای مسائل پارامتری با هندسه پیچیده از قبیل سیال با غلظت متغیر، اشباع متغیر، سطوح آزاد، واکنش‌های سینتیک چندگانه و جریان غیر همدما حل می‌کند. این مدل نیز توانایی کنترل طیف عظیمی از مسائل را در محدوده تئوری و عملی داشته و به مقایسه، مدل‌سازی و شبیه‌سازی مسئله می‌پردازد (Wang & Anderson., 1982).

برای مسئله استاندارد هنری نتایج مدل مطابق شکل‌های (۷) و جدول (۳) است.



شکل ۹. منحنی‌های هم‌غلظت مسئله هنری به روش اجزا محدود FEFLOW.

Fig 9. Co-concentration curves of the Henry problem by FEFLOW finite element method

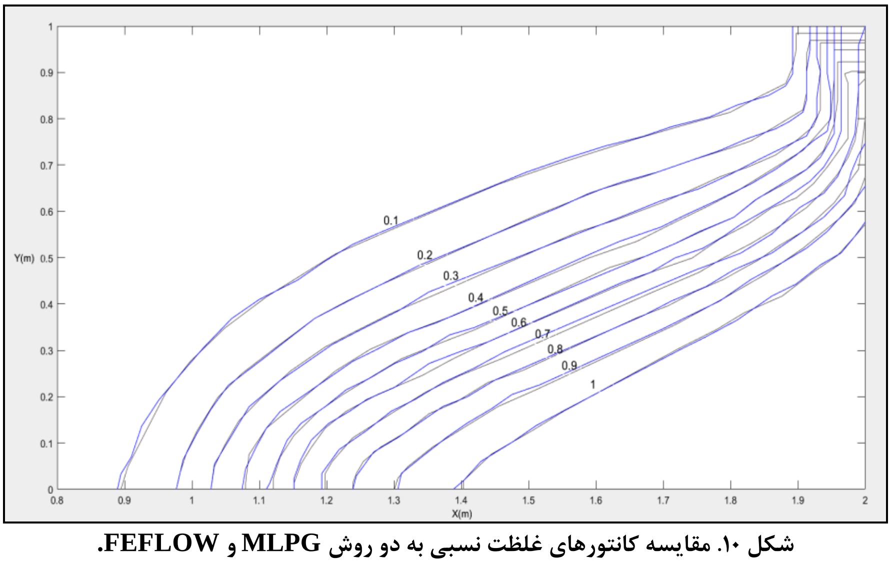
جدول ۳. موقعیت و مقدار منحنی‌های هم غلظت در x=1.5m.

Table 3. Position and value of isoconcentration curves at x=1.5m.

0.69	0.59	0.51	0.44	0.4	0.37	0.31	0.28	0.21	0.12	**Y (m)**
0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	**غلظت نسبی Relative concentration**

ارزیابی مدل‌سازی

پس از مدل‌سازی صورت گرفته به روش پتروو_گالرکین و اجزا محدود نتایج حاکی بر صحت مدل‌سازی گردید چرا که با مقایساتی که از جداول و نمودارها در دو روش صورت گرفت خروجی‌های غلظت در گره‌ها به‌طور قابل قبولی به هم نزدیک می‌باشند. حتی در ناحیه بالای آبخوان در سمت دریا نتایج روش بدون شبکه و شکل گراف آن به این علت که مرز بالای آبخوان نفوذناپذیر می‌باشد از دقت بالاتری برخوردار بوده است. در ادامه مقایسه به‌صورت گراف در شکل (۸) و جدول (۴) ارائه می‌گردد.



شکل ۱۰. مقایسه کانتورهای غلظت نسبی به دو روش MLPG و FEFLOW.

Fig 10. Comparison of relative concentration contours by MLPG and FEFLOW methods.

جدول ۴. مقایسه مقادیر غلظت نسبی در مختصات افقی x=1.5m به دو روش MLPG و FEFLOW.

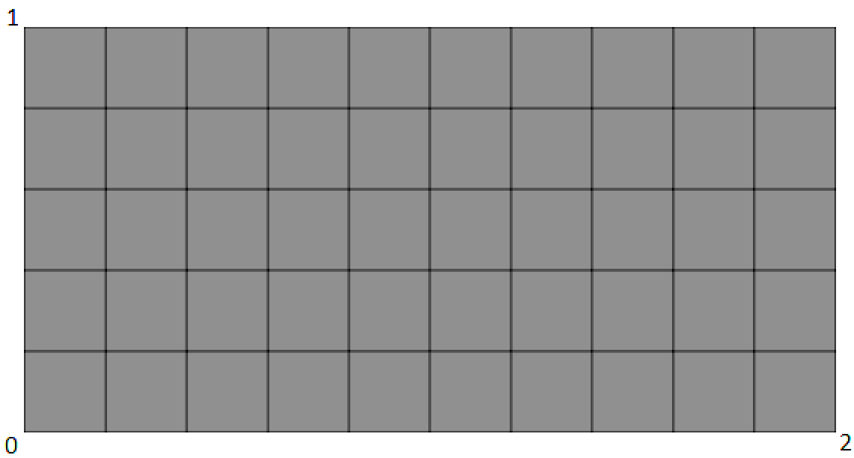
Table 4. Comparison of relative concentration values in horizontal coordinates x=1.5m by MLPG and FEFLOW methods

FEFLOW		MLPG	
غلظت نسبی Relative concentration	مختصات عمودی Vertical coordinates	غلظت نسبی Relative concentration	مختصات عمودی Vertical coordinates
---	m	---	m
1	0.12	1	0.12
0.9	0.21	0.9	0.21
0.8	0.28	0.8	0.26
0.7	0.31	0.7	0.31
0.6	0.37	0.6	0.36
0.5	0.4	0.5	0.4
0.4	0.44	0.4	0.44
0.3	0.51	0.3	0.51
0.2	0.59	0.2	0.59
0.1	0.69	0.1	0.69

آنالیز حساسیت

آنالیز حساسیت روشی است که عدم قطعیت‌های موجود در مدل کالیبره را به‌صورت کمی تعیین می‌کند. به پارامتری که با حداقل تغییرات بیشترین نوسان را در نتایج واسنجی ایجاد نماید حساس‌ترین پارامتر گویند (Jamshidzadeh, 2012). برای تحلیل حساسیت می‌توان از تغییرات خواص آبخوان چون هدایت هیدرولیکی، ضریب ذخیره، تخلخل و یا نحوه شبکه‌بندی استفاده نمود. در این تحقیق به دلیل اینکه آبخوان یک مسئله استاندارد با خواص مشخص مورد بررسی قرار گرفته و با تغییر در مقدار آن‌ها شکل معادلات جریان و انتقال به‌کار رفته در کد تغییر می‌کند بنابراین تغییراتی در نحوه پخش گره‌ی صورت گرفت تا اختلاف نتایج مورد آنالیز قرار گیرد.

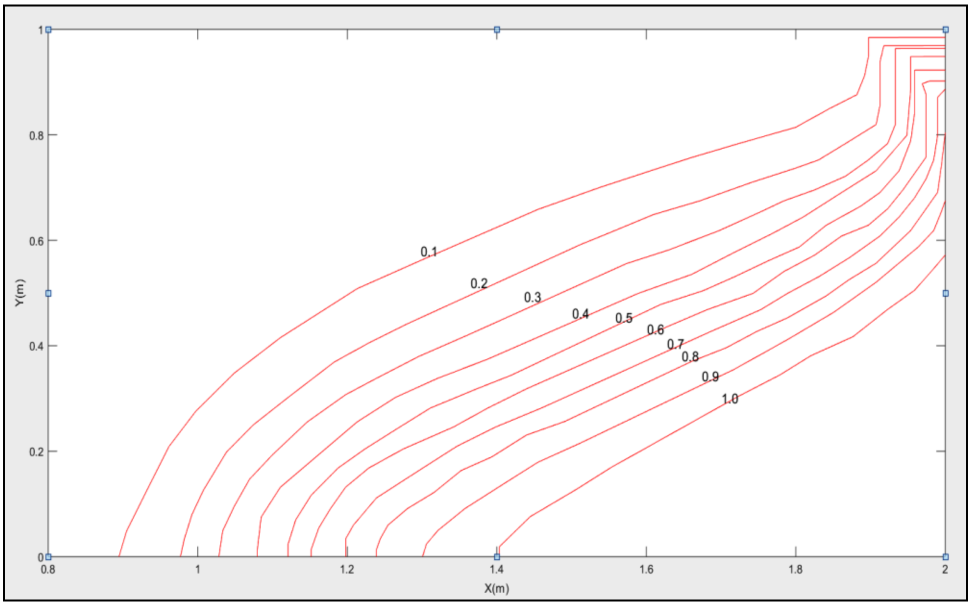
مطابق شکل (۹) فاصله‌بندی منظم در هر دو جهت از ۰/۱ به ۰/۲ تغییر یافت و شبکه با ۶۶ گره و ۵۰ سلول تشکیل شد.



شکل ۱۱. شبکه‌بندی آبخوان هنری با فاصله‌گذاری ۰/۲.

Fig 11. Networking of Henry aquifer with spacing of 0.2.

و گراف حاصل از روش بدون شبکه برای فواصل ۰/۲ مطابق شکل (۱۰) می‌باشد.



شکل ۱۲. منحنی‌های هم‌غلظت مسئله هنری به روش MLPG برای فواصل ۰/2.

Fig 12. Co-concentration curves of Henry problem by MLPG method for intervals of 0.2.

در ادامه جداول (۵)، (۶) و (۷) حساسیت مدل‌سازی با روش بدون شبکه را نسبت به نحوه شبکه‌بندی و همچنین تغییرات خروجی غلظت تعیین می‌کنند.

جدول ۵. مقایسه مقادیر غلظت در مختصات افقی x=1.4 m.

.Table 5. Comparison of concentration values in horizontal coordinates x=1.4m

شبکه‌بندی با فواصل 0.2 Grid with 0.2 intervals		شبکه‌بندی با فواصل 0.1 Grid with 0.1 intervals		مختصات عمودی Vertical coordinates
غلظت concentration	شماره گره node number	غلظت concentration	شماره گره node number	
	---		---	m
32.4089	8	32.4249	15	0
32.2558	15	32.4221	57	0.2
31.9007	30	32.4153	99	0.4
31.7999	37	32.4243	141	0.6
32.7857	52	32.4738	183	0.8
34.7868	59	32.5629	225	1

جدول ۶. مقایسه مقادیر غلظت در مختصات افقی x=1.6 m.

.Table 6. Comparison of concentration values in horizontal coordinates x=1.6m

شبکه‌بندی با فواصل 0.2 Grid with 0.2 intervals		شبکه‌بندی با فواصل 0.1 Grid with 0.1 intervals		مختصات عمودی Vertical coordinates
غلظت concentration	شماره گره node number	غلظت concentration	شماره گره node number	
	---		---	m
32.4749	9	32.4107	17	0
32.1041	14	32.3999	59	0.2
30.9574	31	32.3579	101	0.4

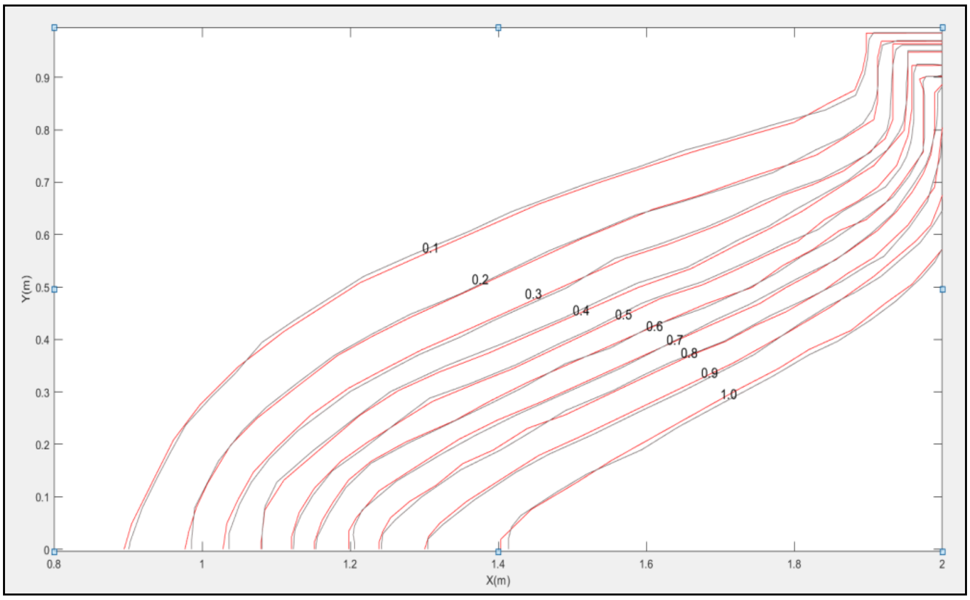
31.5836	36	32.3192	143	0.6
30.9114	53	32.3866	185	0.8
33.7426	58	32.5552	227	1

جدول ۷. مقایسه مقادیر غلظت در مختصات افقی x= 1.8 m.

.Table 7. Comparison of concentration values in horizontal coordinates x=1.8m

شبکه‌بندی با فواصل 0.2 Grid with 0.2 intervals		شبکه‌بندی با فواصل 0.1 Grid with 0.1 intervals		مختصات عمودی Vertical coordinates
غلظت concentration	شماره گره node number	غلظت concentration	شماره گره node number	
	---		---	m
33.2719	10	32.4444	19	0
32.7595	13	32.4264	61	0.2
30.4609	32	32.3354	103	0.4
31.3996	35	32.0055	145	0.6
32.3553	54	32.1299	187	0.8
32.7825	57	32.5743	229	1

به‌طور کلی در اکثر گره‌ها برای هر دو شبکه‌بندی روند تغییرات غلظت در تمام فواصل افقی مشابه می‌باشد اما با کاهش تعداد سلول‌های شبکه میزان غلظت در گره‌ها کاهش یافته و اختلاف آن‌ها در گره‌های بالاتر با مختصات عمودی بیشتر افزایش می‌یابد. در حالت کلی با اینکه مقدار غلظت‌ها برای هر گره مشخص در دو فاصله بندی ذکر شده تغییراتی داشته اما همان‌طور که از شکل (۱۱) مشاهده می‌شود در گراف‌های نهایی که کانتورهای غلظت نسبی هستند اختلاف چندانی مشاهده نگردید. بنابراین، میزان حساسیت مدل‌سازی نسبت به کاهش سلول‌ها اندک بوده و حتی خروجی‌های کار عددی با فاصله‌بندی ۰/۱ نیز کاملاً قابل قبول می‌باشد.



شکل ۱۳. مقایسه کانتورهای هم‌غلظت برای فاصله‌بندی ۰/۱ و ۰/۲.

Fig 13. Comparison of homo-concentration contours for 0.1 and 0.2 spacing.

نتیجه‌گیری

آبخوان‌های ساحلی یکی از مهم‌ترین منابع آب شیرین به حساب می‌آیند بنابراین، مدیریت و نگهداری از آن‌ها بسیار ضرورت دارد. یکی از خطراتی که این نوع از آبخوان‌ها با آن مواجه هستند نفوذ آب دریا می‌باشد. با نفوذ آب‌شور به آبخوان در مقطعی از آبخوان که ضخامت آن نسبت به سفره قابل توجه هست تداخل آب‌شور و شیرین اتفاق افتاده و این امر سبب شده تا از فرضیه جرم مخصوص متغیر که در آن معادلات جریان و انتقال نمک باید به‌طور همزمان حل شوند استفاده گردد. برای حل معادلات از روش بدون شبکه پتروو-گالرکین محلی با تابع شکل حداقل مربعات متحرک و تابع وزن کیوبیک اسپیلاین استفاده می‌شود. این روش به‌علت عدم استفاده از المان‌بندی در مسائلی حتی با دامنه هندسی نامنظم و شرایط مرزی پیچیده به‌کار می‌رود و معادلات با انتگرال‌گیری گوسی قابل حل هستند. علاوه بر این تابع شکل آن موجب پیوستگی در دامنه کلی برای درون‌یابی و تقریب در مرتبه دلخواه می‌گردد. در زمینه تداخل آب‌شور و شیرین در این مطالعه مسئله استاندارد هنری با شرایط مرزی دیریچله و نیومان برای دامنه به‌کار گرفته می‌شود. به‌منظور نمایش دقت مدل‌سازی برای این مسئله از مدل FEFLOW که بر پایه روش اجزا محدود است استفاده می‌گردد. نتایج نهایی به‌صورت کانتورهای هم‌غلظت نمایش داده شد و طبق مقایساتی که صورت گرفت منحنی‌ها بر هم منطبق بودند و این امر بیانگر کارایی و دقت مناسب روش بدون شبکه است. نتایج بر این قرار شد که در محیط آبخوان با خواص هیدرولیکی مشخص پیشروی اثرات شوری چشمگیر بوده و از لحاظ مقداری میزان آن کاهش یافته تا به صفر برسد. لازم به ذکر است که دامنه پخشیدگی آلودگی با تغییر ویژگی‌های آبخوان می‌تواند کاهش یا افزایش یابد.

منابع

Akbarpour, A., Mohtashmi, A & Majidi Khalilabad, N. (2020). *Determination of Well's Capture Zones Using Random Walk Algorithm and FeFlow Simulation Model*, Iranian Journal of Irrigation and Drainage, 14, 1984-2002. [In Persian].

Akbarpour, A., Mohtashmi, A & Kalantari, M. (2018). *An introduction to underground water flow modeling*. authored book, Fekr Beker Publishing House, University of Birjand, Iran. [In Persian].

Akbarpour, A., Mohtashmi, A & Majidi, N. (2018). *Spatio-temporal simulation of pollution movement in a confined aquifer using the numerical method without local Petrov-Galerkin grid*, Proceedings of the 18th Iranian Hydraulics Conference, University of Tehran, Iran. [In Persian].

Akbarpour, A., Molazadeh, M & Asif, M. (2018). *One-dimensional solution of surface water pollution transfer equations with Petrov-Galerkin method without local grid*, Balde Ferdous Aqueduct National Symposium, University of Birjand, Iran. [In Persian].

Akbarpour, A., Molazadeh, M., Dimevar, S & Asif, M. (2017). *Petrov-Galerkin gridless method for solving the displacement-diffusion equation in unsteady state*, National Conference on Modeling and New Technologies in Water Management, University of Birjand, Iran. [In Persian].

Akbarpour, A., Zoghi, M & Bazari, S. (2017). *One-dimensional modeling of groundwater pollution transfer using gridless method*, National Conference on Modeling and New Technologies in Water Management, University of Birjand, Iran. [In Persian].

Arzani, H. (2016). Solving shallow water equations with gridless method", PhD dissertation, Faculty of Civil Engineering, Iran University of Science and Technology, Iran. [In Persian].

Asif, M. (2018). *Numerical solution of pollution transfer equations using local gridless Petrov-Galerkin method in the river*, MSc dissertation, University of Birjand, Iran. [In Persian].

Atluri, S.N. & Zhu, T. (1998). *A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics.* Computational Mechanics, doi:10.1007 / s004660050346, 22, 117-127.

Barrenechea, G.R., Poza, A.H & Yorston, H. (2018). A stablished finite element method for the convection-diffusion-reaction in mixed form, *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 339, 389-415.

Bazari, S. (2017). Solving the pollution transfer equations in saturated porous media with the Petrov-Galerkin method without local mesh", MSc dissertation, Faculty of Civil Engineering, University of Birjand, Iran. [In Persian].

Belytschko, T., Lu, Y. Y., Gu, L. (1994). Elements free Galerkin methods, International Journal for Numerical Methods in Engineering. 30(2): 229-256.

Bixio, A., Putti, M., Carbognin, L & Gambolati, G. (1998). Finite element modeling of seawater in the venice aquifer system, *Transactions on Ecology and the Environment*, 17, 193-200.

Nick, H.M., Raoof, A., Centler, F., Thulner, M and Regnier, P. (2013). Reactive dispersive contaminant in coastal aquifers, *Journal of Contaminant Hydrology*, 145, 90-104.
Rastogi, A.K., Choi, G.W & Ukarande, D.K. (2004). Diffused interface model to prevent ingress of seawater in multi-layer coastal aquifers, *Journal of Special Hydrology*, 4, 1-31.
Sakr, S.A. (1999). *Validity of a sharp interface model in a confined coastal aquifer*, Hydrology Journal, doi: 10.1007/s100400050187.
Samsami, H & Saeed Panah, A. (2013*). Numerical solution of solute transport in groundwater using the Petrov-Galerkin meshless method*, Proceedings of the 13th Iranian Hydraulics Conference, University of Tabriz, Iran. [In Persian].
Sbai, A., Larabi, A & Smedt, F. (1998). Modeling saltwater intrusion by a three-dimensional sharp interface finite element model, *Conference of Computational Methods in Water Resources*, 24, 201-208.
Segol, G., Pinder, G.F & Gray, W.G. (1975). A galerkin finite element technique for calculating the transition position of the saltwater front, *Water Resources Research*, 3, 343-347.
Sherif, M., Singth, V. P & Amer, A.M. (1988). A two-dimensional finite element model for dispersion (2D-FED) in coastal aquifers, *Journal of Hydrology*, 103,11-36.
Singth, A. (2014). Groundwater resources management through the applications of simulation modeling, *Journal of Scientific of the Total Environment*, 499, 414-423.
Singth, L.G., Eldho, T.I & Kumar, A.V. (2016). Coupled groundwater flow and contaminant transport simulation in a confined aquifer using meshfree radial point collocation method (RPCM). *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 66, 20-33.
Swathi, B & Eldho, T.I. (2013). Groundwater flow simulation in confined aquifers using (MLPG), *Journal of Hydrolic Engineering*, 134, 335-348.
Thomas, A., Eldho, T.I & Rastogi, A.K. (2016). Simulation of seawater intrusion in coastal confined aquifer using a point collocation method based meshfree model, *Journal of Water Resource and Protection*, 8, 534-549.
Walther, M., Delfs, J.O., Carundmann, J., Kolditz, O & Liedl, R. (2012). Saltwater intrusion modeling, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236,4798-4809.
Wang, H.F & Anderson, M.P. (1982) .*Introduction to groundwater modeling: finite difference and finite element methods*, Academic Press, doi: 10.1029/EO063i037p00778-02.
Yasi, M., Gholami, Z., NaziGhameshlou, A & Mazaheri, M. (2022). *Two-Dimensional Modeling of Fractional AdvectionDispersion Equation using Meshfree Local Petrov-Galerkin Numerical*
Croucher, A.E & Osulivan, M.J. (1995). *The Henry Problem for Saltwater Intrusion*, Water Resources Research, doi: 10.1029/95WR00431.
Diersch, H.G. (1992). Interactive, Graphics-based Finite-Element Simulation of Groundwater Contamination Processes, *Advances in Engineering Software*, 15, 1-13.
Diersch, H.G. (2014). *Finite element modeling of flow mass and heat transport in porous and fractured media*, springer, doi: 10.1007/978-3-642-38739-5.
Dimevar, S. (2016). *Numerical solution of shallow water equations using Petrov Galerkin meshless method*, MSc dissertation, University of Birjand, Iran. [In Persian].
Frind, E.O. (1982). Simulation of long-term transient density-dependent transport in groundwater, *Advances in Water Resources*, 5, 73-88.
Gotovac, H., Andricevic, R., Gotavac, B., Kozulic, V & Vranjes, M. (2003). An improved collocation method for solving the henry problem, *Journal of Contaminant Hydrology*, 64, 129-149.
Hubbert, M.K. (1940). The theory of groundwater motion, *Journal of Geology*, 48,785-944.
Jamshidzadeh, Z. (2012). Quantitative and qualitative modeling of underground water to investigate the phenomenon of saltwater intrusion, PhD dissertation, Faculty of Civil Engineering, Khajeh Nasiruddin Tosi University, Iran. [In Persian].
Lee, C.H & Cheng, R.T. (1974). *On seawater encroachment in coastal aquifer*, Water Resources Research, 10, 1039-1043.
Liu, G.R. (2002). *Mesh free methods: moving beyond the finite element method*, CRC press. New York Washington, D.C, doi: 10.1201/9781420040586.
Liu, G.R. (2009). *Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, CRC Press, doi: 10.1201/9781420082104.
Liu, G.R & Gu, Y.T. (2005). *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*, springer, doi:10.1007/1-4020-3468-7
Liu, F., Turner, I & Anh, V. (2001). A finite volume unstructured mesh method for modeling saltwater intrusion into aquifer system, *The First International Conference and Workshop on Saltwater Intrusion and Coastal Aquifers, Monitoring, Modeling, and Management, Morocco*, 9, 391-407.
Meenal, M & Eldho, T.I. (2012). Two-dimensional contaminant transport modeling using meshfree point collocation method (PCM), *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36, 551-561.
Mohtashmi, A. (2015). Use of gridless method in modeling groundwater flow in open aquifer. MSc dissertation, Faculty of Civil Engineering, University of Birjand, Iran. [In Persian].

River), Journal of Water and Wastewater Science and Engineering (JWWSE), 6 (3), 47-57.

Yuqun, X., Jichun, W., Chunhong, X & Yongxiang, Z. (1998). *Sea water intrusion and salt water intrusion in the coastal area of Laizhou Bay*, Publications Office of Wiley, doi:10.1111/j.1745-6584.1993.tb00584.x.

Method (Case Study: Athabasca River), Iranian Hydraulic Association Journal of Hydraulics, 17 (4), doi: 10.30482/jhyd.2022.349707.1611. [In Persian].

Yasi, M., Gholami, Z., NaziGhameshlou, A & Mazaheri, M. (2021). *Numerical Solution of Advection-Dispersion Equation using Mesh-free Petrov-Galerkin Method (Case Study: Murray Burn*